

PLANIFICACIÓN CONJUNTA DE LA FABRICACIÓN Y DISTRIBUCIÓN DE PRODUCTOS CON INSTANTES FIJOS DE ENTREGA

J. M. García¹, Sebastián Lozano², Fernando Guerrero³, Gabriel Villa⁴

¹jmg@esi.us.es

²lozano@cica.es

³fergue@esi.us.es

⁴gvilla@esi.us.es

Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla
Camino de los Descubrimientos, s/n, 41092, Sevilla.

Resumen

En este artículo se presenta el problema asociado a la planificación conjunta de la fabricación y distribución de pedidos cuando ambos procesos se producen de forma continua sin esperas. Analizamos el caso en el que los pedidos poseen un instante fijo de entrega y se cuenta con una planta para la fabricación de los pedidos. El problema es analizado en diferentes escenarios en función de determinados parámetros. Se proponen estrategias de resolución basadas en la aplicación de un algoritmo de flujo y exploración dirigida. Finalmente, se muestra una ilustración de los métodos en un ejemplo.

1. Introducción

La logística asociada a la distribución de mercancías suele ser analizada como un proceso independiente del proceso de fabricación del producto que se distribuye. El problema suele asociarse al diseño de rutas para vehículos, en donde se determina la ruta que realiza cada vehículo de forma que se atiendan todas las peticiones, teniendo en cuenta, por lo general, tiempos de viaje y restricciones de capacidad en los vehículos.

Respecto a la planificación de la fabricación de productos, normalmente este problema se encuadra en el campo de la Secuenciación de trabajos, donde una serie de trabajos tienen que ser procesados haciendo uso de un número limitado de recursos disponibles.

En este artículo se presenta el problema asociado con la planificación conjunta de la fabricación y distribución en sistemas en los que el suministro de productos está acoplado con el sistema productivo debido a la ausencia de inventarios del producto final. Dicho problema surge cuando el producto ha de ser fabricado sobre pedido y servido inmediatamente, usualmente por su carácter perecedero. En estos problemas la distribución está ligada a la fabricación y por tanto supeditada a la capacidad del proceso productivo.

Se podría abordar el estudio de la planificación de la distribución y la fabricación como conceptos independientes si existieran inventarios del producto fabricado. Cuando no es así, hay que secuenciar la distribución en función de la capacidad de producción, de la disponibilidad de vehículos y de los datos de demanda.

Para el estudio del problema nos encuadramos en una situación totalmente determinista con un conocimiento completo de los pedidos que deben atenderse en un horizonte temporal determinado. El análisis se realiza con una sola planta de fabricación desde la que parten y donde inicialmente se encuentran los vehículos. La fabricación de un pedido se limita a un único proceso que se realiza sin interrupciones (*no preemption*). La planta de fabricación mide su capacidad de producción en número de pedidos que pueden ser atendidos al mismo tiempo. Cada pedido utiliza una unidad de capacidad durante el tiempo de fabricación, por lo

que, suponiendo C unidades de capacidad en la planta, no pueden fabricarse más de C pedidos al mismo tiempo.

Los pedidos se atienden de forma independiente, lo que significa que un pedido es transportado por un solo vehículo, que regresa a la planta una vez servido el pedido y queda disponible para otras entregas. Esto implica un análisis diferente del problema con respecto a una planificación en la que pudieran servirse varios pedidos por un solo vehículo, aspecto que conduciría la fase de distribución al clásico problema de diseño de rutas para vehículos (vehicle routing) con restricciones de capacidad. El problema supone la misma capacidad en todos los vehículos y considera que los pedidos poseen un tamaño inferior a la capacidad de los vehículos.

Los datos básicos de un pedido P_i son el instante de entrega solicitado e_i , el valor o beneficio obtenido con la entrega del pedido w_i , el tiempo de fabricación tf_i y el tiempo de descarga del pedido tr_i . La ruta que realiza el vehículo es conocida de antemano con sólo conocer la localización del pedido. Los datos en el problema que describen la ruta del vehículo son el tiempo de envío hasta la localización del pedido ti_i y el tiempo de vuelta del vehículo a la planta tv_i . Llamaremos td_i al tiempo total de la fase de distribución $td_i = ti_i + tr_i + tv_i$. En el trabajo se suponen tiempos discretos.

La actividad asociada a la fabricación y envío del pedido correspondería a la siguiente figura:

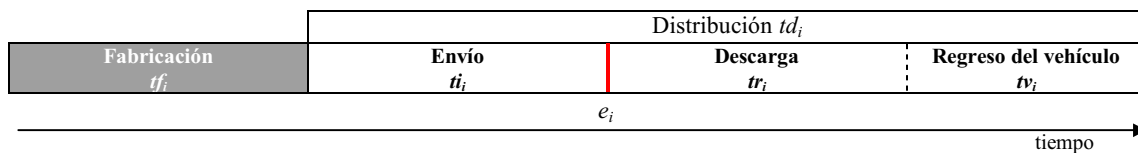


Figura 1: Cronograma de la actividad de un pedido

Un aspecto a tener en cuenta en este problema es que consideramos que el vehículo participa en el proceso productivo. En determinadas actividades industriales, el vehículo forma parte del proceso de fabricación del producto, como soporte del proceso. Esto se produce en productos con una fabricación muy simplificada caracterizada únicamente por la mezcla de determinados compuestos que se realiza directamente en el depósito de carga del vehículo. El ejemplo más claro se presenta en la fabricación del hormigón.

Para el análisis se considera un número de vehículos ilimitado, es decir, siempre existen vehículos disponibles en la planta. Los objetivos básicos en el problema son maximizar el beneficio o valor obtenido por los pedidos servidos y maximizar el número de pedidos servidos. Este segundo objetivo se obtiene del primero asignando el mismo peso w_i a todos los pedidos. Además, en ese caso se añade un segundo objetivo secundario que sería determinar el mínimo número de vehículos necesarios para atender el máximo número de pedidos calculado.

2. Escenario 1: Maximizar el valor de los pedidos

La planificación conjunta de la fabricación y distribución de pedidos cuando se dispone de un número ilimitado de vehículos para los envíos y el objetivo es maximizar el beneficio de las entregas depende únicamente de la secuenciación de los pedidos que se realice en la planta.

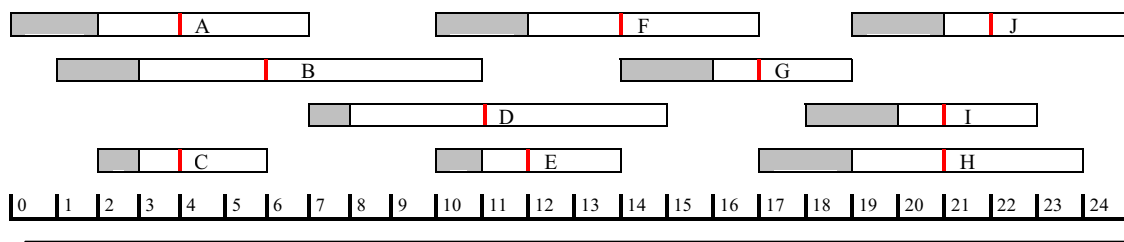


Figura 2: Diagrama cronológico de una demanda de pedidos

La primera cuestión que debe plantearse es si pueden atenderse todos los pedidos. La capacidad de fabricación en planta C es el parámetro que influye a la hora de responder a esa pregunta. En la figura 2 se plantea una situación sobre una demanda de pedidos expresada mediante un diagrama temporal que refleja los instantes de comienzo e_i (□), los tiempos de fabricación tf_i (▨) y distribución td_i (▩) de cada pedido. Supuesta una capacidad de 1 unidad, no podrían fabricarse más de 1 pedido al mismo tiempo, por lo que los pares de pedidos A y B así como el par B y C y otros se verían afectados. Debido a que no se permiten interrupciones en los procesos y además el plazo de entrega es fijo, habría que descartar la fabricación de alguno de ellos.

Para determinar si es posible procesar todos los trabajos, bastaría con comprobar si la capacidad de fabricación C es menor que el mayor grado de simultaneidad de los pedidos en fábrica. Cuando el grado de simultaneidad m excede de C , el problema trataría de encontrar el subconjunto de trabajos con máximo valor total. En cambio si disponemos de una capacidad $C \geq m$, todos los pedidos podrían ser procesados.

El problema de determinar que subconjunto de pedidos maximizan el valor total puede ser estudiado como la planificación de trabajos sobre máquinas idénticas en paralelo, con un número de máquinas igual a la capacidad de la planta. La fase de distribución no intervendría en el análisis pues siempre existen vehículos disponibles. En concreto, la situación planteada responde al problema de la *Secuenciación de trabajos con tiempos fijos (Fixed Job Scheduling Problem, FSP)* descrito en Fischetti [1].

En el problema FSP se disponen de n trabajos con tiempo de inicio y tiempo de procesado dados. Se define para un trabajo i , s_i como el instante de comienzo, f_i el instante de finalización, y $d_i = f_i - s_i$ la duración del mismo. Con cada trabajo se asocia un valor w_i que expresa el beneficio por la realización del mismo. Los trabajos deben ser procesados sobre un conjunto finito de máquinas paralelas. Se trata de encontrar la asignación de trabajos a máquinas de forma que se maximice el valor de los trabajos procesados, teniendo en cuenta que cada trabajo se procesa de forma ininterrumpida sobre alguna de las máquinas del sistema y cada máquina no puede procesar más de un trabajo al mismo tiempo. En nuestro caso cada trabajo correspondería con cada una de las fases de fabricación de los pedidos. La capacidad de fabricación C correspondería con el número de máquinas.

2.1 Formulación

Cuando el número de vehículos es ilimitado, podemos asumir un número m de vehículos, con m igual al mayor grado de simultaneidad del tiempo de actividad de los pedidos. Limitamos de esta forma el número de variables del problema y mantenemos el hecho de que siempre existen vehículos disponibles en planta.

Definimos el instante de comienzo del proceso productivo como $s_i = e_i - tf_i - ti_i$ y el instante de comienzo del envío como $l_i = s_i + tf_i$. El vehículo debe encontrarse disponible en planta en el instante l_i . El instante en que finaliza la actividad asociada a un pedido se define como $f_i = e_i + tr_i + tv_i$.

El mayor grado de simultaneidad vendría definido como $m = \text{máximo} \{m_t: t_o \leq t \leq T\}$ con $m_t = \{i: s_i \leq t \leq f_i\}$ grado de simultaneidad en cada instante t . t_o y T serían los instantes entre los cuales se atienden todos los pedidos.

Definimos las variables:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{s í el vehículo } j \text{ distribuye el pedido } P_i \\ 0 & \text{s í no} \end{cases} \quad i = 1 \dots n; j = 1 \dots m$$

Debido a la posibilidad de que no se realicen todos los pedidos definimos un nuevo conjunto de variables derivadas del conjunto de variables x_{ij} :

$$p_i = \begin{cases} 1 & \text{si el pedido } P_i \text{ es realizado} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Supondremos una ordenación de los n pedidos según su tiempo de comienzo de fabricación tal que $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$.

Para cada uno de los pedidos definimos un conjunto $S(i) = \{k: s_i \leq s_k \leq l_i - l\}$. $S(i)$ que recoge los pedidos que se procesan en fábrica simultáneamente al pedido i en algún instante de tiempo. Dentro de cada conjunto incluiremos al propio pedido.

El modelo quedaría como:

$$\begin{aligned} & \text{Max } \sum_{i=1}^n v_i p_i \\ & \text{sujeto a} \\ & \sum_{j=1}^m x_{ij} = p_i \quad i = 1 \dots n \quad (1) \\ & x_{ij} + x_{kj} \leq 1 \quad i = 1 \dots n-1; \quad j = 1 \dots m; \quad \{k > i : s_k < f_i\} \quad (2) \\ & \sum_{k \in S(i)} p_k \leq C \quad i = 1 \dots n; \quad (3) \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad p_j \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

En (1) se activan las variables que recogen la realización de un pedido. En (2) se impone que dos pedidos cuya actividad coincide en algún instante de tiempo no puedan ser distribuidos por el mismo vehículo. En (3) se asegura que no existen más de C pedidos procesándose al mismo tiempo. El modelo maximiza el valor total de los pedidos servidos.

2.2 Estrategia de Resolución

Aquí proponemos una modificación en el método propuesto por Kroon et al [1995] basado en el cálculo de flujo mínimo a un grafo. El método se basa también en un cálculo de flujo de coste mínimo, pero en este caso sobre un grafo $G(N,A)$ que reduce el número de nodos a $n+1$. Para cada pedido P_i se calcula $\text{Posterior}(i)$ como el primer pedido cuyo proceso de fabricación comienza después de finalizar el proceso de fabricación de P_i . Si mantenemos los pedidos ordenados por tiempo de comienzo s_i , $\text{Posterior}(i) = \{P_k / k = \text{Mínimo}(s_k \geq l_i)\}$. Se añade un pedido ficticio P_{n+1} , que será el posterior de todos los pedidos que no posean pedidos posteriores.

Por cada pedido asociamos un nodo en el grafo, $N = \{1 \dots n, n+1\}$, con el nodo 1 como nodo fuente del grafo. Por cada pedido P_i , $i = 1 \dots n$, existe un arco desde el nodo i hasta el nodo $\text{Posterior}(i)$ con una unidad de flujo de capacidad y un coste igual a $-v_i$. Denominamos estos arcos como el conjunto A^P . Además, se añade un arco de coste cero y capacidad ilimitada desde el nodo i al nodo $i+1$, para $i = 1 \dots n$, referenciados como el conjunto A^M . El flujo de entrada en el grafo es C , la capacidad de fabricación en planta.

El grafo para el ejemplo de la figura 2 quedaría como sigue:

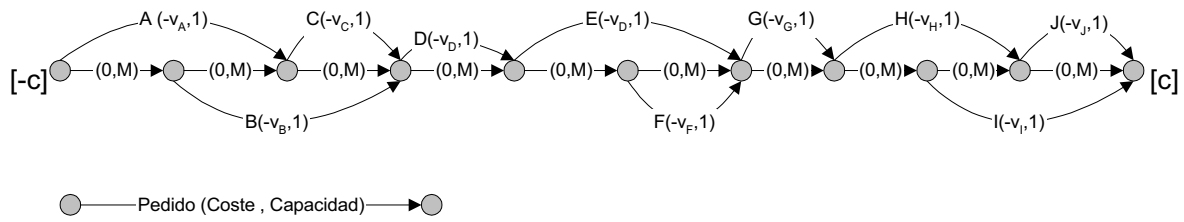


Figura 3: Ejemplo de grafo $G(N,A)$. ($M = \infty$)

Es posible reducir el tamaño del grafo G a partir de la aplicación del algoritmo descrito en Kroon et al (1995).

En la figura 4 se presenta el grafo reducido sobre el grafo de la figura 8.

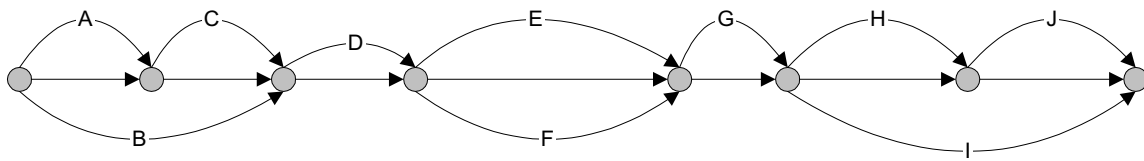


Figura 4: Grafo reducido de Figura 3

El óptimo correspondería con:

$$p^* = \sum_i P_i : (i, P(i)) \in A^P / (i, P(i)) \in \text{ruta de coste mínimo.}$$

3. Escenario 2: Minimizar el número de vehículos para el número máximo de pedidos

En este escenario se busca maximizar el número de pedidos servidos añadiendo además un segundo objetivo que minimiza el número de vehículos necesarios. La particularidad de establecer un doble criterio en este escenario radica en la posibilidad de que existan soluciones alternativas al imponer el criterio de maximizar el número de pedidos. Por ello, dividimos el análisis en dos fases. En la primera fase se calcula el número máximo de pedidos que pueden ser atendidos y en la segunda se busca minimizar el número de vehículos necesarios para atender el número de pedidos calculado en la primera.

Fase I: Maximizar el número de pedidos

La primera fase corresponde con el Escenario 1 del problema, cuando el valor w_i de cada pedido es igual a 1. Por ello, la resolución de esta fase consiste en emplear la misma estrategia descrita en el punto 2.2. Bastaría con modificar los pesos de los arcos asignando a cada arco $(i, P(i)) \in A^P$ un coste de -1. Denotaremos por p^* el número máximo de pedidos calculado.

Fase II: Minimizar el número de vehículos

Para la formulación de la fase II añadimos variables y_j que recogen la utilización de los vehículos, $y_j \geq x_{ij} \forall i, j$ con $j = 1..m$, m igual al mayor grado de simultaneidad. El resto de restricciones no varía. Convertimos la función objetivo de la fase 1 en una restricción más del problema, asignando $v_i = 1 \forall i$. La función objetivo pasa a ser ahora la minimización de la suma de variables que representan el uso de los vehículos.

$$\begin{aligned}
& \text{Min } \sum_{j=1}^m y_j \\
& \text{sujeto a} \\
& x_{ij} \leq y_j \quad i = 1 \dots n; j = 1 \dots m \\
& \sum_{j=1}^m x_{ij} = p_i \quad i = 1 \dots n \\
& \sum_{i=1}^n p_i = p^* \\
& x_{ij} + x_{kj} \leq 1 \quad i = 1 \dots n-1; j = 1 \dots m; \{k > i : s_k < f_j\} \\
& \sum_{k \in S(i)} p_k \leq C \quad i = 1 \dots n; \\
& x_{ij} \in \{0,1\} \quad y_i \in \{0,1\} \quad p_j \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

3.1 Cálculo del número mínimo de vehículos

Para la resolución de la fase II aplicamos un método de exploración dirigida de soluciones admisibles formadas por p^* pedidos. La obtención del número de vehículos para esas soluciones se obtiene con un algoritmo de asignación de vehículos basado en un sencillo procedimiento de asignación de máquinas a trabajos (Fischetti, 1990). El algoritmo, de carácter avaricioso, obtiene el mínimo número de vehículos necesarios para servir el conjunto de pedidos seleccionados. La estrategia consiste en explorar primero los vehículos que ya han realizado algún servicio. Una vez ordenados los pedidos pertenecientes a P^I (pedidos seleccionados) por el tiempo de inicio de actividad s_i , van siendo asignados de forma ordenada al primer vehículo libre de los que ya realizaron algún trabajo. Si todos estos vehículos estuvieran ocupados se activaría uno nuevo.

El método de exploración plantea un árbol que parte como solución inicial, del conjunto de pedidos P^I (un total de p^*) obtenidos en la fase I. El número de vehículos necesarios para distribuir esos p^* pedidos lo denotamos por V , que en principio se corresponde con la mejor solución encontrada que denotamos por V^* . Distinguimos por P^F el conjunto de pedidos no seleccionados en la fase I, formado por $n-p^*$ pedidos.

La exploración en el árbol consiste en la formación de soluciones que recogan la realización de pedidos pertenecientes a P^F . En cada nivel del árbol se establece la introducción de un pedido $P_j \in P^F$. En cada nodo del árbol se distingue un conjunto K que recoge los pedidos de P^F que pertenecen a la solución de ese nodo. $K = \{P_j : P_j \in P^F ; p_j = 1\}$;

Llamamos LP^K al modelo para el cálculo del número mínimo de vehículos en cada nodo. La solución óptima de LP^K correspondería con $V(LP^K)$.

$$\begin{aligned}
LP^K: \quad & \text{Min } \sum_{j=1}^m y_j \\
& \text{sujeto a} \\
& x_{ij} \leq y_j \quad i = 1 \dots n; j = 1 \dots m \\
& \sum_{j=1}^m x_{ij} = \begin{cases} p_i & i \notin K \\ 1 & i \in K \end{cases} \\
& \sum_{k \in P^I} p_k = p^* - |K| \\
& x_{ij} + x_{kj} \leq 1 \quad i = 1 \dots n-1; j = 1 \dots m; \{k > i : s_k < f_j\} \\
& \sum_{k \in S(i)} p_k \leq C \quad i = 1 \dots n; \\
& x_{ij} \in \{0,1\} \quad y_j \in \{0,1\} \quad p_k \in \{0,1\} \quad \forall k \notin K
\end{aligned}$$

La resolución del modelo LP^K se realiza en dos etapas. En la primera se evalúa la admisibilidad del modelo, es decir, se evalúa si es posible encontrar $(p^* - |K|)$ pedidos que satisfagan las restricciones del problema. En caso afirmativo, en una segunda etapa se calcula el número de vehículos $V(LP^K)$ a partir del procedimiento avaricioso descrito con anterioridad. Si $V(LP^K) < V^*$, actualizamos V^* con $V(LP^K)$.

Para determinar en la etapa 1 la admisibilidad de la solución, se plantea el grafo $G^K(N, A^K)$ de la fase I asignando a los arcos que representan los pedidos pertenecientes al conjunto K , $(j, P(j)) \in A^P$ con $P_j \in K$, un déficit de capacidad igual a 1 en el nodo origen y un déficit igual a -1 en el nodo destino. Con ello imponemos la realización de ese pedido ya que una unidad de capacidad es empleada para su fabricación. Además se asigna un coste de $-M$, M lo suficientemente grande, a aquellos arcos que formaban parte de la solución inicial del árbol, $(i, P(i))$ con $i \in P^I$. Con ello se garantiza que el resto de pedidos seleccionados para ser realizados en ese nodo, sean pedidos pertenecientes a la solución inicial P^I ($p_i=1 \rightarrow P_i \in P^I$).

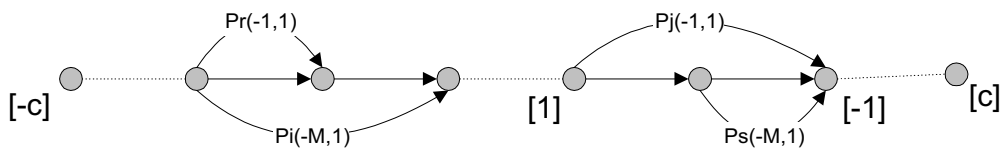


Figura 5: Grafo G^K

En la figura 6, $P_i, P_s \in P^I$, $P_j \in K$. El pedido $P_r \notin K$ y $P_r \notin P^I$. En caso de obtener como solución óptima, en el cálculo de flujo a G^K , un número de pedidos $|P^I(LP^K)|$ igual a $p^* - |K|$ formando parte de la ruta de coste mínimo, la solución proporcionada es admisible. En caso de que $|P^I(LP^K)| < (p^* - |K|)$ la solución es inadmisibles ya que $|P^I(LP^K)| + |K| < p^*$. El árbol se podará en aquellos nodos no admisibles. Además significará que los pedidos $P_j \in K$, de ese nodo, no podrán formar parte conjuntamente de una solución admisible que sirva p^* pedidos.

4. Ilustración

Para el ejemplo de la figura 2, ilustramos los métodos propuestos en los dos escenarios del problema. Suponemos una capacidad de fabricación de $C = 1$.

4.1 Escenario 1

Pedidos	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
w_i	4	11	6	10	8	7	9	4	10	4

Tabla 1: Valores de los pedidos

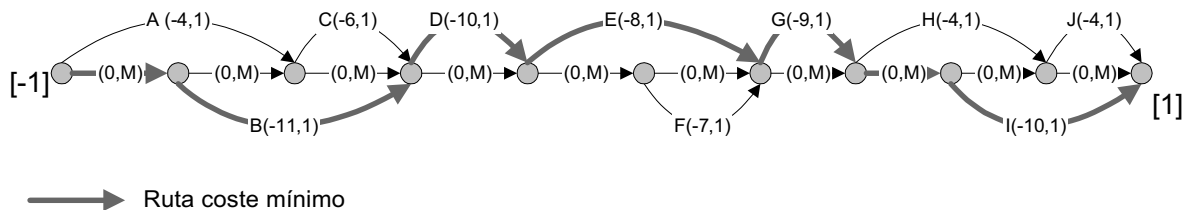


Figura 6: Flujo a coste mínimo para el escenario I

Los pedidos que forman parte de la ruta de coste mínimo hacen máximo el beneficio con un valor total de 48 unidades.

4.2 Escenario 2

En la fase I se obtiene el número máximo de pedidos. Para ello se halla el flujo a coste mínimo como se muestra en la figura 7.

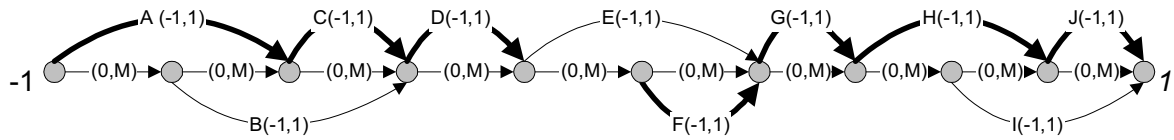


Figura 7: Flujo a coste mínimo para la fase I

Según la figura 7, la ruta mínima está formada por $p^* = 7$ pedidos, donde $P^I = \{A, C, D, F, G, H, J\}$. Por tanto $P^F = \{B, E, I\}$

Para la obtención del número mínimo de vehículos aplicamos el procedimiento de asignación:

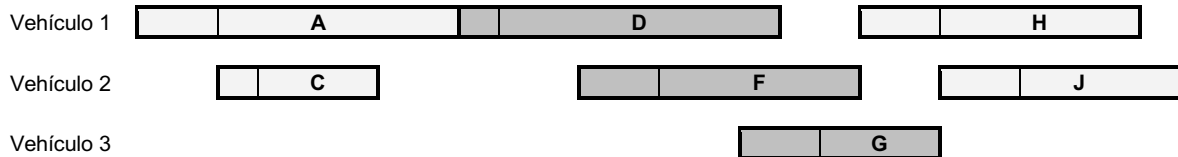


Figura 8: Asignación de Vehículos a pedidos

Se necesitan un total de 3 vehículos en la solución óptima de la fase I. El árbol de exploración de la fase II sería:

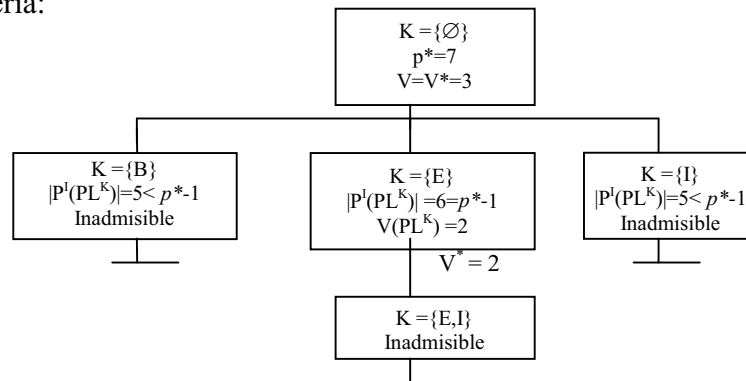


Figura 9: Árbol de exploración dirigida

Veamos el cálculo en dos de los nodos $K=\{B\}$ y $K=\{E\}$:

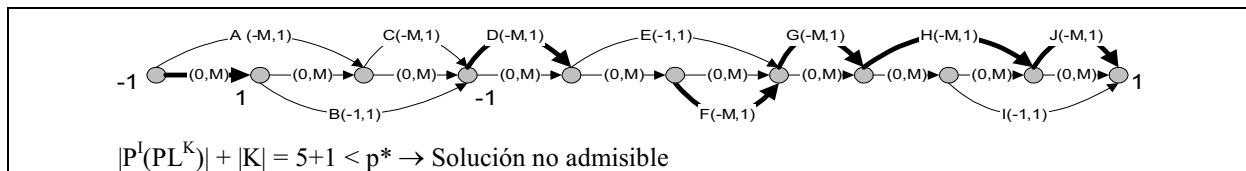


Figura 10: Flujo a coste mínimo del nodo $K=\{B\}$

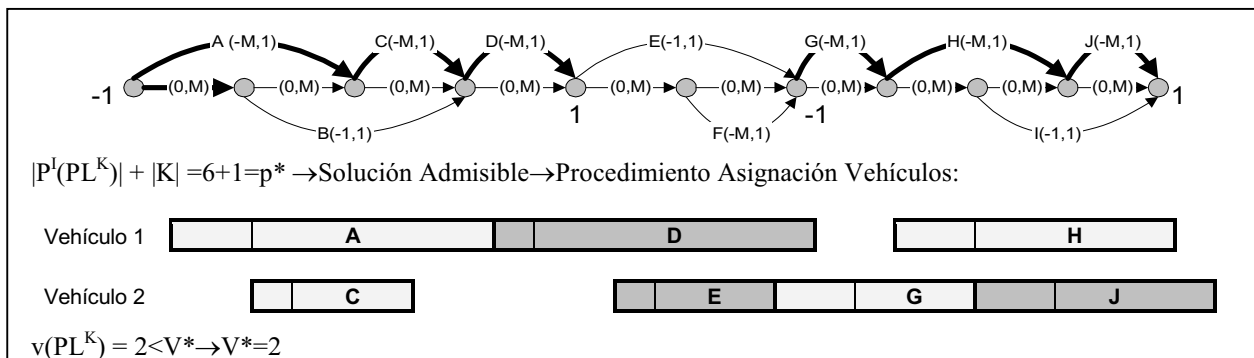


Figura 11: Flujo a coste mínimo del nodo $K=\{E\}$

5. Referencias

- [1] Fischetti M., Martello S., Toth P., (1992), "Approximation algorithms for fixed job schedule problems". *Operations Research* 40/1, pp. S96-S108.
- [2] Kolen W.J., Kroon L.G., (1991), "On the computational complexity of (maximum) class scheduling" *European Journal of Operations Research* 54, pp. 23-38.
- [3] Kroon L.G., Salomon M., Van Wassenhove L. N., (1995) "Exact and approximation algorithms for the operational fixed interval scheduling problem". *European Journal of Operational Research* 82, pp. 190-205.