

Aplicación de Metaheurísticas a la Reasignación Centralizada de Recursos Usando DEA.

G. Villa¹, J.M. García², M. Calle³, J.L. Andrade⁴

¹Ingeniero Industrial, gvilla@esi.us.es

²Ingeniero Informático, jmgs@esi.us.es

³Ingeniero de Organización Industrial, mcalle@esi.us.es

⁴Ingeniero de Telecomunicación, jlap_er_pe@yahoo.es

Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla. Camino de los Descubrimientos s.n., 41092 – Sevilla

RESUMEN

La resolución de la metodología DEA (Data Envelopment Analysis) en la medición de la eficiencia de unidades productivas nunca ha estado ligada a la utilización de metaheurísticas. En este artículo se presenta un tipo de modelo DEA con variables enteras, modelo FDH centralizado, que requiere de dicha metodología. Se desarrollará una batería de problemas aplicados a dicho modelo FDH con orientación de entrada, y se obtendrá el resultado exacto mediante exploración dirigida, y el resultado de aplicar búsqueda tabú. Con ambas soluciones se medirá el error cometido para estos ejemplos desarrollados, justificando así su utilización en problemas de gran tamaño.

1 Introducción.

El Análisis por Envoltura de Datos, más conocido por sus siglas anglosajonas DEA (Data Envelopment Analysis), es una herramienta matemática de programación lineal que resuelve problemas de medición de eficiencia de unidades productivas usando como datos la cantidad de los diferentes recursos que consume en su actividad (entradas o inputs), y la cantidad de cada uno de los productos que genera (salidas o outputs). Es por esto que las unidades deben ser organizaciones que produzcan de forma similar, (los recursos que utilicen y los productos que fabriquen deben ser los mismos). Las unidades productivas son denominadas DMU (Decision Making Unit) haciendo referencia al hecho de que tienen libertad para modificar la cantidad de sus entradas y/o salidas. La medición de la eficiencia de las unidades se realiza mediante la comparación de las unidades existentes o la combinación lineal de dichas unidades.

En un problema donde se pretende medir la eficiencia de organizaciones productivas, se puede definir a priori dos aspectos fundamentales: la tecnología y la orientación. Determinar la tecnología consiste en concretar dónde pueden operar las unidades productivas que existen. Tres son las tecnologías más frecuentes: retornos de escala constante (Constant Return to Scale, CRS), retornos de escala variable (Variable Return to Scale, VRS) y tecnología FDH (Free Disposal Hull). La tecnología CRS considera que las unidades existentes podrían operar dentro de la combinación lineal que forman, mientras que en la tecnología VRS sólo considera como posibles unidades admisibles las combinaciones lineales convexas. Por otra parte la tecnología FDH (Free Disposal Hull) considera como unidades admisibles el conjunto más pequeño que incluya todas las posibilidades de producción generadas de las observaciones. Este conjunto se expresa de la siguiente forma:

$$T_{FDH} = \left\{ (x, y) : \exists \bar{\lambda} \geq 0 : \bar{\lambda} X \leq x, \bar{\lambda} Y \geq y, \text{ con } \bar{e}^t \cdot \bar{\lambda} = 1, \lambda_j \in \{0,1\} \right\} \quad (1)$$

siendo X e Y las matrices de las entradas y salidas de cada una de las unidades presentes en el problema.

Una vez definida la tecnología, queda por concretar la orientación del problema. Este aspecto hace referencia a la dirección de búsqueda de la unidad eficiente con la que se compara la unidad cuya eficiencia se quiere medir. Existen dos orientaciones: de entrada y de salida. En la primera, la búsqueda se inicia con la reducción equiproporcional de todas las entradas del problema, de tal forma que se asume que la unidad eficiente con la que se compara la unidad productiva en estudio, será admisible dentro de la tecnología definida anteriormente y consumirá menos cantidad de los diferentes recursos con el mismo nivel de salidas. En cambio, para la orientación de salida, se realiza un aumento equiproporcional de las salidas en la búsqueda de la unidad eficiente dentro de la tecnología definida en el problema, con mayor nivel de salidas y con igual consumo de recursos.

Escogidas la tecnología y la orientación del problema, queda determinado el modelo DEA a utilizar. En el caso de que el problema posea una tecnología de retornos de escala constante y orientación de entrada, el modelo que lo resuelve será del tipo CCR (CCR-I con orientación de entrada y CCR-O con orientación de salida). De forma análoga, para tecnologías con retornos de escala variables, el modelo será del tipo BCC. Por último, para la tecnología FDH, se utiliza el modelo FDH-I (con orientación de entrada), o el modelo FDH-O (con orientación de salida). Un estudio más amplio está disponible en Cooper et al (2000) [1].

El modelo propuesto en este artículo difiere de los modelos DEA convencionales en que las DMUs del problema no son proyectadas sobre la frontera eficiente de forma independiente, sino de forma agregada. Por tanto el objetivo ya no será la mejora individual de cada DMU sino del conjunto. Una reasignación centralizada de recursos implica un sometimiento de las unidades individuales en su comportamiento de cara al objetivo del sistema como un todo. Por ello, y aunque en este artículo lo mantendremos por conveniencia, denominar a las unidades productivas como DMUs no es muy apropiado ya que han perdido su autonomía de escoger sus propias entradas y salidas.

En el apartado 3 de este artículo se presenta dicho modelo cuando el problema opera con tecnología FDH. En el cuarto apartado se explican los métodos de resolución del modelo adoptados en este artículo, así como la solución que se obtiene del problema de reasignación centralizada adoptando el modelo FDH tradicional. En el quinto apartado se exponen los experimentos realizados, para concluir en el sexto apartado con un resumen y conclusiones.

2 Literatura relevante sobre la reasignación de recursos.

Existen referencias en la literatura que estudian las DMUs de forma conjunta. Así, Golany et al (1993) [2] presentó un modelo de reasignación de recursos basado en la metodología DEA con orientación de entrada. En un artículo posterior, Golany y Tamir (1995) [3] propusieron un modelo DEA de reasignación de recursos con orientación de salida, que incluye restricciones que imponen cotas superiores al consumo total de las unidades. Athanassopoulos (1995) [4] presenta un modelo DEA, modelo de programación de objetivo (GoDEA) para un plan centralizado. Athanassopoulos (1999) [5] propone un nuevo modelo, esta vez no en

forma envolvente sino en forma multiplicadora. Así mismo, Färe et al (1997) [6] y Beasley (2001) [7] presentan modelos donde las DMUs son tratadas de forma conjunta.

3 Modelo FDH propuesto para la reasignación de recursos mediante DEA con orientación de entrada.

En este apartado se presenta el modelo para la reasignación de recursos considerando una tecnología FDH. Es un modelo radial, con lo que se busca una reducción equi-proporcional en todas las entradas. Las dos diferencias esenciales respecto de los modelos DEA convencionales son:

- ⇒ En vez de solucionar un modelo de programación lineal para cada DMU presente en el problema, todas las DMUs son proyectadas de forma simultánea.
- ⇒ En vez de reducir las entradas de cada DMU, es el total del consumo de entradas de las DMUs lo que se pretende reducir. Además se pretende un mantenimiento de la suma de las salidas producidas, permitiendo el empeoramiento individual.

Así, considerando:

$j, r=1, 2, \dots, n$	subíndice para las DMUs
$i=1, 2, \dots, m$	subíndice para las entradas
$k=1, 2, \dots, p$	subíndice para las salidas
x_{ij}	cantidad de entrada i consumida por DMU j
y_{kj}	cantidad de salida k producida por DMU j
θ	reducción radial del vector del total de entradas
$(\lambda_{1r}, \lambda_{2r}, \dots, \lambda_{nr})$	vector para la proyección de DMU r

El modelo queda:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar } \theta \\
 & \text{s.a.} \\
 & \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \theta \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad \forall i \\
 & \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad \forall k \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \quad \lambda_{jr} \in \{0,1\} \quad \theta \text{ libre}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Como puede observarse del segundo grupo de restricciones, son admisibles todas las soluciones que mantengan el nivel total de las salidas. De forma análoga puede obtenerse el modelo para la orientación de salida.

4 Resolución del problema centralizado

Nos centraremos en la resolución del problema centralizado tipo FDH con orientación de entrada, empleando el modelo FDH tradicional y el modelo centralizado presentado en el artículo.

4.1 Resolución del problema centralizado a través del modelo FDH tradicional.

Si comparamos el modelo presentado con el modelo FDH tradicional:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} \quad \theta_r \\
 & \text{s.a.} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_r x_{ir} \quad \forall i \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} \geq y_{kr} \quad \forall k \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad \lambda_j \in \{0,1\} \quad \theta_r \text{ libre}
 \end{aligned} \tag{3}$$

se puede observar que hay que resolver el modelo tantas veces como DMUs existan. Si se define:

$$D(r) = \left\{ j : \exists i' : x_{irj} < x_{ir} \text{ con } x_{ij} \leq x_{ir} \quad \forall i \neq i' \quad \text{ó} \quad \exists k' : y_{k'j} > y_{k'r} \text{ con } y_{kj} \geq y_{kr} \quad \forall k \neq k' \right\} \tag{4}$$

como el conjunto de DMUs $j(r)$ que dominan a la DMUr, el modelo FDH tradicional puede resolverse mediante el siguiente algoritmo:

$$\theta_r = \min_{j \in D(r)} \left\{ \max_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{x_{ij}}{x_{ir}} \right\} \right\} \tag{5}$$

Un problema resuelto por este algoritmo puede encontrar una medida de la reducción que se efectúa del total de las entradas mediante la expresión:

$$\theta_{\text{FDH}} = \min_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{\sum_{j(r) \in D(r)} x_{ij(r)}}{\sum_{j=1}^n x_{ij}} \right\} \tag{6}$$

De esta forma se obtiene cuál es el ahorro del total de entradas conseguido mediante la resolución del modelo FDH tradicional.

4.2 Resolución del problema a través del modelo centralizado.

Antes de presentar los métodos de resolución adoptados, es necesario detenerse en la naturaleza del problema. El modelo FDH-I centralizado realiza la comparación de cada una de las unidades productivas del problema con una DMU existente perteneciente a la frontera eficiente, con el objeto de encontrar la mayor reducción posible del total de las entradas. Por tanto, si se quiere encontrar la solución que realiza la máxima reducción de recursos, se deben calcular todas las posibles proyecciones de las DMUs con cada unidad eficiente. Es un problema combinatorio cuya magnitud dependerá del total de unidades existentes y del número de unidades eficientes. Si hay 'n' unidades en el problema de las cuales 'e' son eficientes ($e \leq n$), el número de combinaciones posibles será e^n .

Para problemas con un número de unidades productivas no muy pequeño, el número de combinaciones puede ser intratable computacionalmente, de lo que se deriva la necesidad de utilizar alguna metaheurística para la resolución del problema. En este artículo se ha optado por la búsqueda tabú. La resolución exacta se ha realizado mediante una exploración dirigida. Ambos métodos son explicados a continuación.

4.2.1 Búsqueda tabú.

La solución admisible de donde se parte es la que se obtiene del modelo FDH tradicional. Sea E el conjunto de unidades eficientes en el problema. Como cada DMUr se está proyectando sobre alguna unidad eficiente $e \in E$, un movimiento consistirá en la proyección de una de las unidades del problema r sobre otra unidad eficiente $e' \in E$ diferente a la anterior.

El tamaño de vecindad es por tanto $n \times (|E| - 1)$. Pero no todos los vecinos de una determinada solución son admisibles. Antes de realizar un movimiento hay que comprobar si éste desemboca en una solución donde la suma de las salidas supera la cantidad inicial. Una vez comprobada la admisibilidad, el incremento de la función objetivo en ese movimiento será: $\Delta F.O. = \theta^{\text{después}} - \theta^{\text{antes}}$, donde:

$$\theta^{\text{después}} = \max_{i=1..m} \left\{ \frac{\text{consumo total antes} - x_{ie} + x_{ie'}}{\text{consumo total inicial}} \right\} \quad (7)$$

Se han considerado una lista tabu-end, en donde los movimientos están prohibidos un número de periodos T , y una lista tabu-end-from en donde los movimientos tabú lo son en un número de periodos T' . La restricción tabú aplicada consiste en que el movimiento es tabú si está contenido en alguna de las dos listas tabú. También se ha empleado una estrategia de diversificación consistente en que en un número de iteraciones REP en que no se haya conseguido mejorar la función objetivo, la semilla de la búsqueda tabú cambia hacia una solución donde cada DMUr se proyecta sobre la unidad eficiente que menos veces haya sido objeto de proyección por dicha unidad durante la exploración anterior. El método finaliza cuando en un número de iteraciones ITER la solución no mejora.

4.2.2 Exploración dirigida.

Existen tantos niveles como número de DMUs existan en el problema, y para cada nivel ' r ', existen tantos descendientes de cada nodo del nivel superior como $|E|$. Un nodo puede ser codificado por su nivel ' r ', y dentro de él, por la unidad sobre la que se proyecta ' e '. La notación que usaremos será $e(r)$. La solución de la que parte el método es la mejor de las obtenidas por la búsqueda tabú. Se realiza una estrategia "depth-first" con una cota superior inicial igual a la solución de la búsqueda tabú de partida, y una cota inferior en cada nodo que se calcula de la siguiente forma:

$$CI[e(r)] = \max_{i=1..m} \left\{ \frac{\sum_{r' \leq r} x_{ie(r')} + \sum_{r' > r} \min_{e \in E} x_{ie}}{\sum_r x_{ir}} \right\} \quad (8)$$

Si la cota inferior es mayor que la cota superior vigente, entonces el nodo puede podarse. Hay que verificar la admisibilidad de cada nodo respecto a la suma de las salidas.

5 Experiencia computacional

Se ha desarrollado una aplicación para el estudio del modelo presentado con orientación de entrada de 50 problemas generados de forma aleatoria, todos ellos con dos entradas y una salida, en donde están involucradas diez DMUs. Se ha escogido esta combinación de entradas, salidas y DMUs con el objeto de que el procedimiento de resolución exacto no tarde un tiempo excesivo en ejecutarse (los resultados que se muestran han sido desarrollados en un ordenador PC AMD K6 con 18 GB de disco duro y 128 MB de RAM a 500 MHZ) y así poder medir el error que se comete al resolverlo por la búsqueda tabú. Como prueba de lo dicho, se han realizado cuatro experimentos con 15 DMUs cuyos resultados de aplicar búsqueda tabú y exploración dirigida se exponen a continuación. El tiempo de ejecución del método exacto demuestra la complejidad de su resolución para problemas mayores a los planteados en el artículo.

Prob.	Nº DMUs eficientes	BÚSQUEDA TABÚ			EXPLORACIÓN DIRIGIDA		
		Semilla FDH	Solución	Tiempo	Solución	Número de iteraciones	Tiempo
1	5	0.502494	0.340399	13.12s	0.336658	11879085	8h 29min 24s
2	4	0.484416	0.379221	1.05s	0.360759	2071020	1h 46min 32s
3	7	0.615385	0.346154	10.82s	0.333747	192737027	3días 22h 20min 8s
4	5	0.509383	0.465147	40.04s	0.465147	24122995	17h 39min 1s

Tabla 1. Resultados computacionales para 15 DMUs.

5.1 Resultados de la aplicación.

En el anexo se exponen conjuntamente en una tabla la solución dada por el método FDH tradicional y por el método FDH centralizado resuelto búsqueda tabú y exploración dirigida. De estos resultados se deduce, tal y como era de esperar, que los obtenidos por el modelo presentado en el artículo reducen el total de las entradas en mayor proporción que el modelo FDH tradicional, ya que este último resuelve un problema donde la reducción de los recursos debe también producirse en cada una de las unidades del problema. Por tanto no contempla soluciones que el modelo centralizado sí evalúa.

La búsqueda tabú se ha realizado con los siguientes valores de los parámetros presentados en el subapartado anterior: ITER=8000; REP=150; T=1; T'=2. En la siguiente figura se representa el error relativo medio porcentual cometido por la búsqueda tabú y el cociente entre los tiempos que tardan ambos métodos.

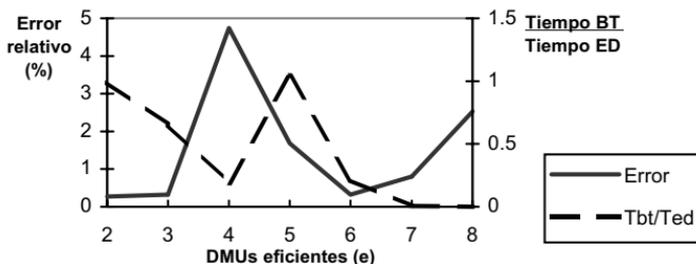


Figura1.- Error relativo medio cometido por la búsqueda tabú y cociente entre los tiempos de resolución de la búsqueda tabú y la exploración dirigida.

Se puede observar que para problemas de más complejidad ('e' grandes), como media, el tiempo de la exploración dirigida es mucho mayor para dichos problemas que el de la búsqueda tabú. Sin embargo no puede decirse lo mismo del error relativo medio. La media del error que se comete en todos los problemas es del 1.71 %.

6 Resumen y conclusiones

Aunque los modelos DEA convencionales fijan objetivos de forma independiente para cada DMU, la metodología también permite la consideración de restricciones y objetivos comunes. En este artículo se ha presentado un modelo DEA para la reasignación de recursos tipo FDH, el cual, busca reducciones (amplificaciones) radiales del total de los consumos (producciones) de todas las entradas (salidas).

También se ha puesto de relieve la necesidad de utilizar alguna metaheurística, ya que la resolución del modelo tarda en exceso para un número de datos no muy elevado. Se puede observar también la considerable reducción obtenida respecto al modelo FDH tradicional.

Por último, hay que considerar que la aplicación realizada en este artículo pretende ser la introducción de métodos metaheurísticos, como la búsqueda tabú, en la resolución de problemas DEA. Una batería de problemas más amplia hubiera sido de mucha utilidad a la hora de analizar cuestiones como qué valores de los parámetros son los que dan las mejores soluciones al problema planteado.

Referencias

- [1] Cooper, W.W., Seiford, L.M. y Tone, K., *Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2000
- [2] Golany, B., Phillips, F.Y. y Rousseau, J.J., "Models for improved effectiveness based on DEA efficiency results", *IIE Transactions*, **25**, 6 (1993) 2-10
- [3] Golany, B. y Tamir, E., "Evaluating Efficiency-Effectiveness-Equality Trade-offs: A Data Envelopment Analysis Approach", *Management Science*, **41**, 7 (1995) 1172-1184
- [4] Athanassopoulos, A.D., "Goal programming & data envelopment analysis (GoDEA) for target-based multi-level planning: Allocating central grants to the Greek local authorities", *European Journal of Operational Research*, **87** (1995) 535-550
- [5] Athanassopoulos, A.D., "Decision Support for Target-Based Resource Allocation of Public Services in Multiunit and Multilevel Systems", *Management Science*, **44**, 2 (1998) 173-187
- [6] Färe, R., Grabowski, R., Grosskopf, S. y Kraft, S., "Efficiency of a fixed but allocatable input: A non-parametric approach", *Economic Letters*, **56** (1997) 187-193
- [7] Beasley, J.E. (2001) <http://mscmga.ms.ic.ac.uk/jeb/deafixed.html>

Prob.	Nº DMUs eficientes	BÚSQUEDA TABÚ			EXPLORACIÓN DIRIGIDA		
		Semilla FDH	Solución	Tiempo	Solución	Número de iteraciones	Tiempo
1	4	0.858044	0.656151	7.09s	0.656151	2776	17s
2	3	0.70709	0.671642	1.04s	0.656716	1170	5s
3	4	0.775348	0.659898	4.26s	0.659898	244880	23min 30s
4	4	0.476562	0.443359	4.56s	0.419922	159228	11min 42s
5	6	0.819209	0.730697	4.12s	0.72693	7619910	7h 1min 25s
6	4	0.515086	0.372845	1.21s	0.372845	25204	2min 1s
7	5	0.696809	0.411348	5.11s	0.411348	4720	28s
8	3	0.521891	0.458844	0.88s	0.457093	41652	1min 34s
9	7	0.915805	0.624567	3.35s	0.624567	279524	54min 30s
10	7	0.867308	0.744802	6.09s	0.726923	9990309	6h 29min 36s
11	7	0.775061	0.349633	6.15s	0.349633	131663	6min 40s
12	8	0.91944	0.744417	2.86s	0.719603	2933176	3h 9min 21s
13	4	0.638112	0.50503	2.15s	0.470825	18612	1min 24s
14	5	0.894837	0.784441	2.25s	0.784441	901985	1h 10min 8s
15	5	0.546219	0.290258	3.68s	0.290258	25475	54s
16	5	0.816822	0.654206	1.54s	0.654206	1589390	3h 45min 12s
17	6	0.858377	0.696028	2.31s	0.687042	3040698	2h 49min 2s
18	8	0.810316	0.549085	15.34s	0.539595	1014928	2h 50min 41s
19	5	0.664903	0.533007	4.17s	0.533007	691175	2h 8min 1s
20	3	0.564725	0.564725	0.66s	0.559871	8379	9s
21	6	0.768722	0.632159	1.92s	0.632159	3395478	50min 54s
22	5	0.670082	0.59276	0.87s	0.59276	1109005	24min 10s
23	6	0.756654	0.60501	1.75s	0.60501	3213504	57min 14s
24	4	0.775444	0.700288	1.54s	0.652666	35220	13min 6s
25	3	0.689441	0.65528	0.70s	0.650621	1158	4s
26	3	0.32618	0.229614	1.26s	0.229614	195	1s
27	3	0.540636	0.322072	1.26s	0.322072	168	1s
28	5	0.832117	0.732847	6.27s	0.732847	524070	35min 26s
29	3	0.628186	0.589205	9.77s	0.589205	210	2s
30	3	0.71298	0.615799	10.98s	0.615799	24918	2min 47s
31	5	0.675481	0.503906	4.50s	0.503906	66320	9min 22s
32	4	0.771058	0.652268	1.59s	0.575221	4692	43s
33	3	0.619497	0.529874	10.82s	0.529874	3270	32s
34	5	0.717905	0.591216	2.42s	0.591216	1332380	4h 57min 17s
35	5	0.810865	0.6384	1.21s	0.6384	487005	1h 25min 1s
36	4	0.700214	0.663812	7.09s	0.663812	143368	37min 19s
37	4	0.530466	0.405018	2.09s	0.358423	9908	2min 5s
38	6	0.748438	0.469734	6.76s	0.469734	1776	4s
39	6	0.822449	0.619617	2.14s	0.614833	1000398	5h 58min 27s
40	5	0.481633	0.27551	11.20s	0.22449	65	1s
41	3	0.505725	0.45229	0.98s	0.45229	9132	3min 39s
42	4	0.595281	0.423387	3.13s	0.381125	84	2s
43	3	0.549372	0.412926	1.81s	0.412926	13047	6min 38s
44	6	0.653689	0.344411	5.87s	0.344411	446172	3h 28min 51s
45	3	0.270335	0.255981	1.54s	0.255981	9297	2min 7s
46	3	0.574737	0.450526	2.31s	0.450526	432	10s
47	2	0.392562	0.26971	0.88s	0.26971	20	0.5s
48	4	0.778342	0.470389	11.48s	0.470389	151708	57min 59s
49	2	0.336538	0.3125	1.98s	0.310777	352	9s
50	6	0.516509	0.410377	0.98s	0.410377	631764	2h 42min 5s

Tabla 2. Resultados computacionales para 10 DMUs.