II Conferencia de Ingeniería de Organización
Vigo, 5-6 Septiembre 2002

La Dualidad en el Problema de Transporte

Francisco López Ruiz[1], Germán Arana Landín[2]
[1] Doctor Ingeniero Industrial, Departamento Organización de Empresas, E.U.I.T.I.-San Sebastián-UPV, oeploruf@sc.ehu.es
[2] Ingeniero de Organización Industrial, Departamento Organización de Empresas, E.U.I.T.I.-San Sebastián-UPV, oeparlag@sc.ehu.es

RESUMEN

Actualmente, el modelo de transporte presenta una gran variedad de aplicaciones en los diferentes ámbitos de la empresa (comercial, industrial, etc.) que no tienen relación con el transporte. Muchos problemas económicos que en principio nada tienen que ver con el problema de transporte, mediante la utilización de ciertas transformaciones pueden ser convertidos en un problema de transporte y en consecuencia, ser resueltos aplicando los métodos propios de este tipo de problemas. Este artículo describe dos casos de aplicaciones económicas de la dualidad.

1. INTRODUCCION.

Numerosos programas lineales que simulan problemas económicos y que no guardan relación con el problema de transporte sin embargo, tienen la misma estructura formal. Otro tipo de problemas, aunque formalmente presenten una estructura diferente, realizando adecuadas transformaciones permiten obtener programas lineales cuya estructura es análoga al programa lineal que simula el problema de transporte. La resolución de este tipo de problemas puede ser llevada a cabo bien mediante la utilización del método general del Simplex, bien mediante algoritmos específicos, entre los que cabe indicar el método de transporte.

La idea fundamental de la dualidad en programación lineal es que todo programa lineal llamado primal, lleva asociado un programa dual, de manera que al resolver el programa lineal original se obtiene una solución para su problema dual [1]. En consecuencia, si un problema económico puede formularse mediante un problema de programación lineal, en general, existe otro problema económico relacionado con el inicial, que corresponde al problema dual.

Existen unas relaciones estructurales entre un programa lineal y su dual que resumidas son [2]:

1.-El dual de un problema de maximización es uno de minimización y viceversa.

2.-El programa dual tiene una variable por cada restricción del programa original o primal.

3.-El programa dual tiene tantas restricciones como variables existen en el programa original.

4.-Los coeficientes de la función objetivo del programa original son los términos independientes de las restricciones del dual, y los términos independientes de las restricciones del programa original son los coeficientes de la función objetivo del programa primal.

5.-La matriz de los coeficientes de las restricciones del programa dual, es la traspuesta de la matriz de las restricciones del programa primal.

6.-El sentido de las desigualdades del programa dual es inverso del sentido de las desigualdades del problema primal (para programas duales simétricos). Si las restricciones del programa primal son igualdades (para programas duales asimétricos), las restricciones del programa dual son del tipo ($\leq$).

7.-En el caso de la forma simétrica, las variables duales no pueden ser negativas. Para el caso de la forma asimétrica, las variables duales pueden estar o no restringidas (pueden tomar cualquier valor).

La formulación matemática del problema de transporte en su forma estándar es:

$$\min \ z = \sum_{i=1}^{i=m}\sum_{j=1}^{j=n} c_{ij}x_{ij} \qquad (1)$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{j=n} x_{ij} = s_i \qquad \text{(i=1, 2,....,m); (restricciones en origen)} \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{i=m} x_{ij} = d_j \qquad \text{(j=1, 2, ...,n); (restricciones en destino)} \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad \text{(i=1, 2, ...,m / j=1, 2, ...,n)} \qquad (4)$$

En forma matricial resumida es:

$$\min \ z = c^T . x$$

sujeto a:

$$A . x = b$$

$$x \geq 0$$

Para determinar el programa dual del problema de transporte asignamos a cada restricción en origen (2) la variable dual u_i cambiada de signo, y a cada restricción en destino (3) la variable dual v_j .

Por tanto, el programa dual es:

$$\max \ w = -\sum_{i=1}^{m} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n} d_j v_j \qquad (5)$$

$$\text{sujeto a:} \qquad -u_i + v_j \le c_{ij} \quad \forall(i,j) \qquad (6)$$

$$u, v \quad \text{no restringidas}$$

$$\text{con} \quad u = (u_1, \ldots, u_m) \quad \text{y} \quad v = (v_1, \ldots, v_n) \qquad (7)$$

Al problema (1-4) se le denomina problema primal, mientras que al problema (5-7) se le llama problema dual.

2. INTERPRETACION ECONOMICA DE LA DUALIDAD.

El significado económico de las variables duales es el siguiente [3]:

u_i = es el precio en el origen i (almacén, fábrica, etc.) del producto.

v_j = es el valor de dicho producto puesto en el destino j (punto de demanda).

Las restricciones del tipo: $-u_i + v_j \le c_{ij}$, significan que el precio en destino (v_j) del producto menos el precio en origen (u_i) de dicho producto puede ser, a lo sumo, igual al coste de transporte desde el origen *i* al destino *j* correspondiente. Por tanto, el transporte no puede dar lugar a plusvalías no justificadas. A los precios/costes u_i, v_j, se les conoce con el nombre de precios sombra o precios ficticios y representan unos precios teóricos.

El significado de dichos precios es que indican ventajas relativas de localización de los centros de producción (orígenes) o de los centros de consumo (destinos), debidas a la proximidad de los centros de consumo o bien, a la existencia de mejores medios de transporte.

3. APLICACIONES DE LA DUALIDAD.

A continuación presentamos dos tipos de aplicaciones basadas en la dualidad.

1. Se plantea un problema de transporte para una empresa industrial junto con el modelo para analizar la oferta a realizar por una empresa de distribución/transporte, siendo ambos problemas duales.

Una empresa industrial dispone de dos plantas de producción para la fabricación de sus artículos. La capacidad de producción mensual es de 150 y 300 unidades respectivamente. Existen tres centros de consumo cuyas demandas son de 100, 180 y 170 unidades mensuales respectivamente. La matriz de costes unitarios de distribución se indica en la tabla 1.

Destino Origen	1	2	3
A	10 u.m.	20 u.m.	30 u.m.
B	20 u.m.	50 u.m.	40 u.m.

Tabla 1

El objetivo es planificar la distribución abasteciendo las demandas de los tres centros de consumo con el mínimo coste. Si representamos mediante x_{ij} la cantidad de artículos enviados desde el origen/planta i al destino/centro de consumo j el modelo lineal correspondiente a este problema (primal) es:

$$\text{Min. } z = 10x_{11} + 20x_{12} + 30x_{13} + 20x_{21} + 50x_{22} + 40x_{23}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \qquad x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 150 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 300 \\ x_{11} + x_{21} &= 100 \\ x_{12} + x_{22} &= 180 \\ x_{13} + x_{23} &= 170 \\ x_{ij} &\geq 0 \end{aligned}$$

Consideremos ahora una empresa de transportes que le propone a la empresa industrial responsabilizarse de la distribución de sus productos, mediante la presentación de una oferta basada en las siguientes condiciones: la empresa de transportes adquiere los artículos en origen a un precio u_1 en la primera planta, y a un precio u_2 en la segunda. Tras realizar el transporte, entrega los artículos en los centros de consumo cobrando v_1 por artículo entregado en el primer centro, v_2 en el segundo centro y v_3 en el tercer centro. Se trata de analizar la oferta de la empresa de transporte.

Como el objetivo de la empresa de transportes es maximizar el margen bruto entre los ingresos y los gastos de adquisición de los productos, la función objetivo (modelo lineal del problema dual) es:

$$\text{max. } w = 100v_1 + 180v_2 + 170v_3 - 150u_1 - 300u_2$$

Sin embargo, los precios a proponer por parte de la empresa de transporte, no pueden ser más gravosos para la empresa industrial que en la actualidad. En consecuencia, estos precios estarán condicionados por los costes de transporte actuales de la empresa industrial, es decir:

$$\begin{aligned} v_1 - u_1 &\leq 10 \\ v_2 - u_1 &\leq 20 \\ v_3 - u_1 &\leq 30 \\ v_1 - u_2 &\leq 20 \\ v_2 - u_2 &\leq 50 \\ v_3 - u_2 &\leq 40 \end{aligned}$$

La empresa industrial ha de decidir las cantidades de artículos a transportar utilizando el criterio de minimizar los costes, cuya expresión será función de las citadas cantidades y de los costes marginales de transporte. Por otra parte, la empresa de transportes utiliza como datos las cantidades globales a distribuir entre los orígenes y los destinos para fijar los precios, de manera que ambos elementos (cantidades y precios) definen el margen bruto que se desea maximizar.

Los costes unitarios de transporte de la empresa industrial representan restricciones para la empresa de transportes, y las limitaciones de la empresa industrial intervienen en la función objetivo del modelo que analiza la oferta (problema dual). Analizando ambas situaciones, en principio parece difícil que la empresa industrial acepte una oferta con unos costes superiores a los actualmente existentes. En consecuencia, las expectativas de margen de la empresa de transportes están limitadas por los costes de la empresa industrial.

En este ejemplo, la interpretación que se deduce del problema dual es un caso particular de la interpretación más general del problema dual.

2. Consideremos los problemas que involucran la realización de ciertas actividades y que consumen o utilizan determinados recursos, es decir problemas de asignación óptima de recursos [4].

En este tipo de problemas, el significado del problema llamado primal es el siguiente: se consideran n actividades cuyos niveles o cantidad de producto x_j hay que determinar. Para ello se utilizan m recursos de los cuales se dispone en las cantidades b_i. Las cantidades de recursos consumidas por cada una de las actividades viene dada por la llamada matriz de coeficientes tecnológicos $A=[a_{ij}]$, en donde cada elemento a_{ij} representa la cantidad del recurso i que se necesita por unidad de la actividad j, de manera que el vector A_j representa el consumo de recursos de la actividad j, siendo c_j el coste unitario de utilización de dicha actividad (i=1,....,m / j=1,....,n).

El problema dual consiste en determinar una oferta de m precios u_i para cada uno de los recursos, de manera que cada una de las actividades j pueda ser sustituida a un coste que no sea superior al actual, es decir, que para cada actividad j se ha de verificar que:

$$u \,.\, \mathrm{A}_j \leq c_j$$

En este problema el objetivo es maximizar los ingresos en el supuesto de que todos los recursos se utilizen totalmente. Mediante el siguiente ejemplo se observa el caso particular de esta interpretación.

Una granja dedicada a la explotación de ganado vacuno, desea determinar las cantidades de los tipos de alimento disponibles que deben suministrarse a cada animal para satisfacer determinados requisitos de nutrición a un coste mínimo. En la tabla 2 se indica el número de unidades de cada tipo de ingrediente nutritivo básico contenido en un kg. de cada tipo de alimento, junto con los requisitos diarios respecto a la nutrición y los costes de cada alimento:

Ingrediente nutritivo	Kg. de maíz	Kg. de residuo de grasas	Kg. de alfalfa	Requisito diario mínimo
Carbohidratos	90	20	40	200
Proteínas	30	80	60	180
Vitaminas	10	20	60	150
Coste (u.m.)	21	13	15	

Tabla 2

El objetivo es determinar la dieta más económica que satisfaga las anteriores condiciones. Para ello, consideremos las siguientes variables de decisión:

x_1= kg. de maíz a utilizar; x_2=kg. de residuo de grasas; x_3=kg. de alfalfa

El modelo lineal correspondiente a este problema (primal) es:

$$\text{min. z} = 21x_1 + 13x_2 + 15x_3$$

s.a.

$$\begin{gathered} 90x_1 + 20x_2 + 40x_3 \geq 200 \\ 30x_1 + 80x_2 + 60x_3 \geq 180 \\ 10x_1 + 20x_2 + 60x_3 \geq 150 \\ x_i \geq 0 \end{gathered}$$

La formulación del problema dual es:

$$\text{max. w} = 200u_1 + 180u_2 + 150u_3$$

s.a.

$$\begin{gathered} 90u_1 + 30u_2 + 10u_3 \leq 21 \\ 20u_1 + 80u_2 + 20u_3 \leq 13 \\ 40u_1 + 60u_2 + 60u_3 \leq 15 \\ u_i \geq 0 \end{gathered}$$

Supongamos ahora que una empresa dedicada a la fabricación de piensos sintéticos quiere suministrar piensos a esta granja. El problema que se le plantea es determinar a qué precios u_1, u_2, u_3 debe vender los compuestos sintéticos de carbohidratos, proteínas y vitaminas respectivamente, tal que maximice sus ingresos y que además, sea competitivo con el maíz, residuo de grasas y alfalfa, que es la dieta actual de los animales.

La demanda diaria de carbohidratos es de 200 unidades, y las de proteínas y vitaminas, de 180 y 150 unidades respectivamente (necesidades mínimas). En consecuencia, los ingresos a maximizar son:

$$200u_1 + 180u_2 + 150u_3$$

Además, con el objetivo de ser competitivo, el coste sintético (u . A $_j$) de los equivalentes nutritivos de maíz, residuo de grasas y alfalfa obtenidos mediante sus compuestos sintéticos de carbohidratos, proteínas y vitaminas, no debe ser superior que el coste directo (c_j) del maíz, residuo de grasas y alfalfa. Esta condición es la que indican las tres restricciones. Por ejemplo, la tercera restricción:

$$u \,.\, A_3 = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]. \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 60 \end{bmatrix} = 40u_1 + 60u_2 + 60u_3 \le 15$$

significa que el precio de un alimento que nutritivamente equivale a la alfalfa, obtenido a partir de los compuestos sintéticos de carbohidratos, proteínas y vitaminas ($40u_1 + 60u_2 + 60u_3$) no debe ser superior al precio de la alfalfa (15 u.m.) para que pueda ser competitivo.

Según el teorema fundamental de la dualidad, los valores que toman las funciones objetivo de ambos problemas para x*=(x_1^*, x_2^*, x_3^*) y u*=(u_1^*, u_2^*, u_3^*) son iguales y por tanto, el ingreso de la empresa de piensos sintéticos es el mismo que el gasto en que incurre la granja en el supuesto de elegir ambos estrategias óptimas. En consecuencia, los precios (u_i) a ofertar de los productos sintéticos de los recursos, son los precios internos o precios sombra de los recursos en la dieta más económica utilizada en la granja.

4. CONCLUSIONES

Con independencia de ser una curiosidad matemática, debido a la utilidad que presenta la dualidad de los programas lineales, cada vez son mayores sus aplicaciones [5].

A.-Desde el punto de vista macroeconómico, la dualidad tiene mucho interés, puesto que si la distribución y asignación óptima de los recursos disponibles en un país constituye el problema primal, su correspondiente problema dual es la determinación de los precios de dichos recursos. En consecuencia, una vez resuelto el programa lineal para la determinación óptima de los recursos, planteando y resolviendo el correspondiente problema dual se obtendrán los precios teóricos de cada una de los recursos, de manera que si el modelo de competencia perfecta funciona de manera satisfactoria, estos precios son los que deben regir en el mercado.

B.-En los estudios de planificación en los que se llevan a cabo estudios por zonas o comarcas concretas para cada uno de los diferentes productos, para determinar la oferta y la demanda de cada uno de ellos, la dualidad aplicada al problema de transporte es de mucha utilidad. Una vez resuelto el problema de transporte (después de estimar los costes de transporte entre las diferentes zonas), se obtienen los valores de las variables duales u_i, v_j, que sirven de indicadores de referencia de ventajas relativas debidas a la localización de las diferentes zonas geográficas productoras y distribuidoras.

El conocimiento de estos indicadores puede ser muy interesante para las empresas que tratan de instalarse en una determinada región de un país puesto que se puede conocer la ventaja o desventaja relativa al transporte que dicha localización conlleva.

5. REFERENCIAS

[1] DORFMAN, R.; SAMUELSON, P. A., y SOLOW,R. M., (1964) "Programación Lineal y Análisis Económico", *Aguilar, Madrid.*

[2] RIOS INSUA S., (1993) "Investigación Operativa. Optimización", *Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S. A.*

[3] SANTIAGO SUAREZ, A., (1972) "La programación económica por el método del transporte", *Estudios del Instituto de Desarrollo Económico. Madrid.*

[4] LARRAÑETA, J., (1987) "Programación lineal y grafos", *Servicio de publicaciones de la Universidad de Sevilla.*

[5] SANTIAGO SUAREZ, A., (1970) "Aplicaciones económicas de la Programación lineal", *Biblioteca Universitaria de Economía. Guadiana de publicaciones. Madrid.*