*V Congreso de Ingeniería de Organización*
*Valladolid-Burgos, 4-5 Septiembre 2003*

Índice

# Multiplicidad de los pesos en el análisis envolvente de datos

Cecilio Mar Molinero[1]
[1] Becario Ramón y Cajal
Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials
Universitat Politecnica de Catalunya
Diagonal 647, Barcelona
mar@ioc.upc.es

## RESUMEN

*En este trabajo se explora la existencia de soluciones múltiples en la forma multiplicador del modelo de Análisis Envolvente de Datos (DEA). Se parte como primal de la formulación llamada envolvente, un problema de programación lineal que se resuelve para cada unidad de decisión. Se demuestra que este problema es siempre degenerado cuando una unidad de decisión es eficiente. Como consecuencia de la degeneración de este primal existen varias soluciones para el dual. Pero se sabe que cuando un problema lineal es degenerado las variables duales no miden el valor marginal de los recursos. Los valores marginales se han de obtener combinando todas las soluciones del dual. En este trabajo se estudia la degeneración en el problema tipo envolvente de DEA, se describe la metodología para calcular los valores marginales de los recursos, se hace un análisis geométrico y se dan ejemplos. También se discute el problema de los pesos cero y se propone una solución.*

***Palabras clave*** *Análisis Envolvente de Datos, DEA, Degeneración en Programación Lineal, Medida de la Eficiencia, Pesos en DEA.*
.

## 1. Introducción.

El Análisis Envolvente de Datos, DEA, mide la eficiencia de unidades de decisión, DMUs, a través de un proceso de comparaciones múltiples. Se trata de un modo empírico de estimación de funciones de producción basado en la programación matemática; [1, 2, 3, 4].

El DEA, partiendo de la observación de las decisiones tomadas en la práctica, asigna precios relativos a los recursos que entran el proceso de producción y a sus productos, entendiendo tanto recursos como productos en el sentido más general de "inputs" y "outputs" en inglés. Hace tiempo que se sabe que los precios relativos asignados tanto a inputs como a outputs, llamados pesos, no son únicos. Sin embargo, se ha estudiado poco de donde nace esta multiplicidad y cómo elegir los valores de los pesos en un estudio determinado. Este trabajo se plantea el origen del problema y propone un modo de resolverlo.

## 2. Funciones de producción.

La teoría de funciones de producción en Microeconomía establece las relaciones teóricas entre las cantidades que entran en una transformación, inputs, las cantidades producidas, outputs, y la calidad del proceso de transformación; [5]. Es fácil ilustrar los conceptos de las funciones de producción en el caso de dos inputs, ya que nos podemos ayudar de un gráfico tal cómo el de la Figura 1. Sean los dos inputs, $X_1$ y $X_2$, y sean sus precios $u_1$ y $u_2$. Imaginemos también que se producen dos outputs, $Y_1$ y $Y_2$, y sean los precios de los outputs $v_1$ y $v_2$. El valor total de los outputs es K, que se define:

$$K = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

Para producir este valor K se ha consumido un valor $x_1u_1$ del primer input y un valor $x_2u_2$ del segundo input. Se puede producir de un modo ineficiente, en cuyo caso se usarán más inputs de lo necesario para conseguir el mismo output y se podrá disminuir el valor de uno o más de los inputs sin que esto afecte el valor del output. Si no es posible mantener el output constante y reducir el valor de algún input sin que haya que aumentar el valor de otro input, decimos que estamos operando eficientemente; [1]. Se puede operar eficientemente de varias maneras, es decir con varias combinaciones de inputs y outputs. El conjunto de los puntos eficientes para un valor constante de output se conoce con el nombre de isocuanta y forma una frontera de producción. Así en la Figura 1 las curvas AA’ y FF’ son dos isocuantas diferentes. El punto M en la isocuanta AA’ usa input $X_1$ por valor $x_1u_1$ e input $X_2$ por valor $x_2u_2$. La tecnología determina las proporciones en que se usan los inputs y se producen los outputs. Así, todos los puntos situados en la recta OC usan la misma tecnología en cuanto a los inputs ya que los usan en las mismas proporciones.

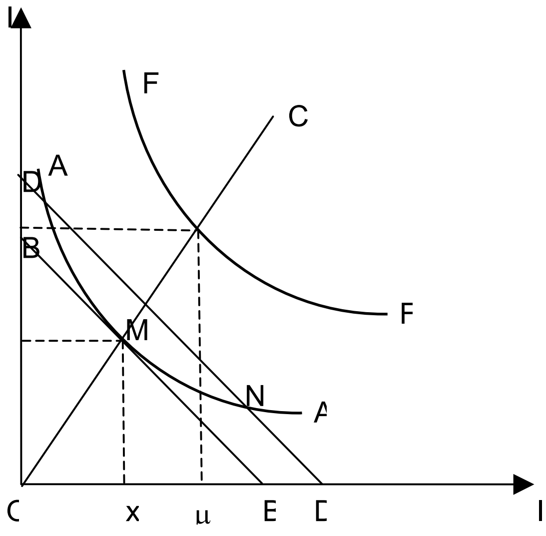


Figura 1. Funciones de producción y líneas de gasto constante

Dentro de la teoría de las funciones de producción se distingue entre los rendimientos constantes a escala y los rendimientos variables a escala. En el caso de los rendimientos a escala constantes, el ratio del valor de los outputs al valor de los inputs permanecerá constante a lo largo de la línea OC en la Figura 1. Llamemos a este ratio e. Se puede escribir:

$$e = \frac{v_1 y_1 + v_2 y_2}{u_1 x_1 + u_2 x_2}$$

Si no existen rendimientos a escala constante, el ratio entre el valor de los inputs y el valor de los outputs no será el mismo en el punto M y en el punto M'. Podremos, sin embargo, relacionar estas dos cantidades si usamos una cantidad que llamaremos $u_0$:

$$e = \frac{v_1 y_1 + v_2 y_2}{u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_0}$$

La constante $u_0$ será negativa si se produce bajo rendimientos crecientes a escala, positiva si se produce bajo rendimientos decrecientes a escala, y cero si se produce bajo rendimientos constantes a escala.

Si los gastos en inputs estuvieran limitados por un presupuesto sería posible gastar todo el presupuesto en comprar input 1, o en comprar input 2, o en comprar una combinación de los dos inputs. Todas las combinaciones posibles se encontrarían sobre una línea recta tal como BB' en la Figura 1. M minimiza los costos de producción dentro de la isocuanta AA'. Esto es fácil de ver. Imaginemos que preferimos producir en el punto N. El costo de los inputs vendría determinado por la línea de presupuesto DD', más lejana del origen que la línea BB', lo que implica un costo más alto.

Concluímos que, dados unos precios de los recursos $u_1$ y $u_2$, la tecnología bajo la cual opera el punto M es óptima porque este punto está en la isocuanta y porque la isocuanta es tangente en este punto a la línea de presupuesto. En otras palabras, dado un punto en la isocuanta, los precios de los recursos que lo hacen óptimo vienen determinados por las derivadas a la isocuanta en este punto.

## 3. El Análisis Envolvente de Datos.

En la práctica no se conoce la función de producción, pero se puede aproximar por medio de segmentos lineales usando un método formalizado matemáticamente por Charnes, Cooper y Rhodes [6]: el modelo CCR. El modelo CCR suponía rendimientos constantes a escala, y fue extendido a rendimientos variables a escala por Banker, Charnes y Cooper [7].

El modelo CCR toma como incógnitas los precios de los recursos, y como datos las cantidades de inputs y de outputs. Este modelo intenta establecer si un DMU elegido de antemano opera de modo eficiente, y lo hace asignando precios que lo harían operar de modo eficiente tanto técnicamente como en cuanto a los precios. Su formulación matemática refleja la discusión anterior.

$$\text{Max } e_o = \frac{\sum_{j=1}^{J} v_j \, y_{jo}}{\sum_{i=1}^{I} u_i \, x_{io}}$$

con las restricciones:

$$\frac{\sum_{j=1}^{J} v_j\ y_{jk}}{\sum_{i=1}^{I} u_i\ x_{ik}} \leq 1 \qquad k = 1,\dots, K$$

$$u_i\ , v_j\ \geq\ 0$$

en donde i es un índice para los inputs; j es un índice para los output; k es un índice para las DMUs; o indica la DMU cuya eficiencia está bajo observación. Este modelo se suele completar con restricciones para que $u_i$ y $v_j$, no tomen valores nulos. En este trabajo no se incluirán tales restricciones, ya que el tema de los precios cero es uno que se quiere desarrollar. El modelo BCC se puede incluir dentro de esta formulación, extendiendo el sumatorio hasta i = 0, con $x_{i0}$ = 1. El dual de este problema lineal se conoce como formulación envolvente y se escribe:

$$\text{Max}\ \ z$$

$$\sum_{k=1}^{K} \lambda_k\ x_{ik} \leq x_{io} \qquad i = 1,2$$

$$\sum_{k=1}^{K} \lambda_k\ y_{jk} \geq y_{jo} z \qquad j = 1,2$$

$$z, \lambda_k \geq\ 0$$

La formulación de tipo envolvente intenta aproximar a la isocuanta a través de segmentos de recta que dejan todos los puntos a un lado del origen excepto los que unen los segmentos. Esto se puede ver en la Figura 2, en la cual se presenta el caso de un output y dos inputs. En la Figura 2 el eje vertical mide la cantidad del input 2 consumida, y el eje horizontal mide la cantidad del input 1 consumida.

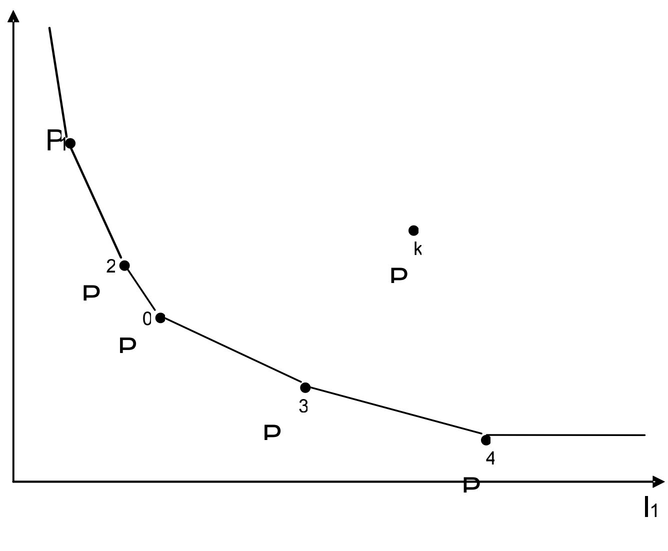


Figura 2. Una función de producción empírica.

Las DMUs $P_1$ $P_2$ $P_o$ $P_3$ y $P_4$ son técnicamente eficientes. Las demás DMUs, como $P_k$, están fuera de la función de producción y corresponden a DMUs técnicamente ineficientes. La formulación tipo multiplicador intenta asociar a cada DMU situada en la frontera los precios relativos de los inputs y outputs que la hacen técnicamente eficiente, mientras que la formulación tipo envolvente intenta establecer si una DMU está situada sobre la frontera. Así, la formulación tipo multiplicador está intentando calcular la derivada de la función de producción para las DMUs situadas en la frontera. El paralelismo entre la situación que se representa en la Figura 1 y la que se representa en la Figura 2 es claro. Pero hay una diferencia importante. En la Figura 1 estamos trabajando con funciones contínuas y contínuamente derivables, mientras que las funciones que se representan en la Figura 2 contienen discontinuidades en la derivada. Los puntos de interés son precisamente aquellos en que aparecen las discontinuidades. Por ejemplo, hay una discontinuidad en el punto $P_0$.

## 4. Unos resultados desconcertantes

Consideremos un ejemplo sencillo adaptado de Land [8]. Los datos se recogen en la Tabla 1.

| DMU | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Input 1 | 19 | 1 | 2 | 10 |
| Input 2 | 6 | 6 | 15 | 17 |
| Output | 120 | 24 | 40 | 120 |

Tabla 1. – Datos para el ejemplo

El orden en que se numeran las DMUs es arbitrario. En principio, cambiar el orden no debería de resultar en ningún cambio en los resultados. Esto no es lo que sucede. Veamos. Utilicemos el programa LINDO para estimar la eficiencia de la DMU 4 usando el modelo CCR orientado a los outputs en su forma envolvente con los datos en el orden de la Tabla 1. Al hacerlo encontramos que la DMU 4 tiene una eficiencia de 1, siendo los valores duales 0.041825 para el input 1; 0.034221 para el input 2; y 0.008333 para el output. Si cambiamos el orden en que presentamos los datos al ordenador de modo que la DMU 4 sea la primera, seguida de la DMU 1, la DMU 2, y la DMU3 obtenemos valores distintos; el valor dual del primer input cambia a 0.060465; el valor dual para el segundo input cambia a 0.023256; y el valor dual para el output permanece constante en .008333. Pero aunque los valores duales han cambiado, la eficiencia de la DMU 4 no cambia y sigue siendo 1.

Podemos ir directamente a la definición de coste marginal [9] y explorar cómo cambia la función objetivo cuando se relaja la restricción en una unidad. Relajamos la primera restricción en una unidad, haciendo cambiar el lado derecho de la desigualdad de 10 a 11. El valor de la función objetivo cambia a 1.04183, con lo que obtenemos un coste marginal de 0.04182. Si relajamos la segunda restricción de 17 a 18 obtenemos un valor de 0.02325. Al relajar la tercera restricción de 0 a -1, obtenemos un valor l de 0.00833. Resumiendo, hemos encontrado tres soluciones para los duales tal como se ve en la Tabla 2.

| Solución | 1 | 2 | Relajación | Final |
|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | 0.06046 | 0.04182 | 0.04182 | 0,05141 |
| $u_2$ | 0.02325 | 0.03421 | 0.02325 | 0,02858 |
| v | 0.00833 | 0.00833 | 0.00833 | 0.00833 |

Tabla 2. Valores duales para el ejemplo

¿Por qué esta multiplicidad de soluciones? Para verlo es conveniente hacer una representación gráfica del problema. Transformamos los datos aplicando los multiplicadores adecuados de modo que todas las DMUs produzcan la misma cantidad de output. De este modo se obtiene la Tabla 3.

| DMU | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Input 1 | 19 | 5 | 6 | 10 |
| Input 2 | 6 | 30 | 45 | 17 |
| Output | 120 | 120 | 120 | 120 |

Tabla 3. Datos transformados para que los outputs sean iguales.

Los datos de la Tabla se pueden representar de forma gráfica tal como se ve en la Figura 3.

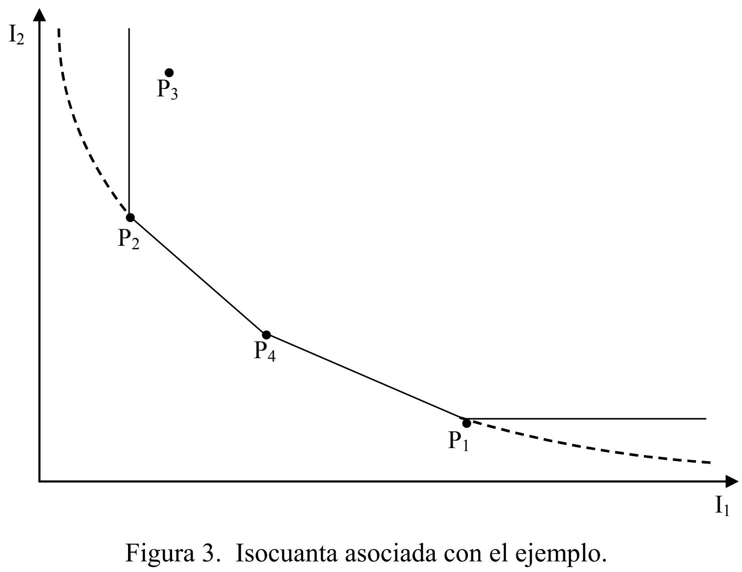


Figura 3. Isocuanta asociada con el ejemplo.

La DMU 4 está situada sobre la isocuanta y es, por lo tanto, comparativamente eficiente. Como la isocuanta es mixtilínea, existe una derivada por la derecha y una derivada por la izquierda del punto $P_4$. En $P_4$ la tangente por la izquierda, el segmento $P_2P_4$, tiene por ecuación:

$$1 \text{ Input}_1 + 9 \text{ Input}_2 = 263$$

Si dividimos por 263 nos encontramos con los valores:

$$0.04812 \text{ Input}_1 + 0.03421 \text{ Input}_2 = 1$$

Vemos que los coeficientes son precisamente los valores duales calculados en la solución 2 de la Tabla 2. Nótese que el vector (0.04812, 0.03421) es un vector direccional perpendicular al segmento $P_2P_4$. Del mismo modo podemos establecer que el segmento $P_4P_1$ tiene como ecuación:

$$0.06046 \text{ Input}_1 + 0.02325 \text{ Input}_2 = 1$$

Los coeficientes de la ecuación son los valores duales que se muestran en la primera columna de la Tabla 2. Así, pues, los valores duales son los componentes del vector direccional perpendicular al segmento $P_4P_1$.

En general, cuando tengamos un punto eficiente en la envolvente habrá un vector asociado con cada porción de hiperplano que se una en el punto. Cuantas más hiperplanos lo contengan, más soluciones alternativas habrá para el dual; [10]. Pero el número de soluciones del dual no se termina aquí, sino que hay infinitas combinaciones lineales de las soluciones anteriores que también son soluciones del problema dual. Otra consecuencia de estas observaciones es que, cuando la porción de hiperplano sea paralela a uno de los ejes, el vector direccional contendrá un cero entre sus componentes, dando lugar al problema de los valores duales cero; [11,12].

## 5. La formulación envolvente produce soluciones degeneradas

Las soluciones degeneradas en la programación lineal contienen ceros entre los valores básicos. Si la DMU observada es eficiente, tan sólo dos variables de decisión tomarán valores distintos de cero: $\lambda_0$ y z; [13]. Sabemos que cada valor cero entre las variables básicas produce una solución dual alternativa. Cuanto mayor sea el número de inputs y de outputs en el modelo, mayor será el número de soluciones duales alternativas, y esto sin contar sus combinaciones lineales. El problema de la degeneración en programación lineal ha sido estudiado desde hace mucho tiempo; [14, 15, 16, 17, 18].

En un programa lineal, cuando la solución no es degenerada, el vértice del simplex en el que se da la solución óptima está perfectamente definido por un número suficiente de hiperplanos. No sobra ninguno. No pasa así cuando se trata de soluciones degeneradas, en que hay un exceso de hiperplanos en el vértice óptimo. Algunos hiperplanos no son activos en el sentido de que no afectan la región factible. Sin embargo, estos hiperplanos afectan los costos marginales, ya que entran en juego cuando se relajan las restricciones activas.

Estudiemos el envolvente convexo de una formulación DEA envolvente. Las variables de decisión son z y las $\lambda_k$. En total son K+1 incógnitas. La solución óptima para una DMU eficiente se encuentra en el punto z = 1, $\lambda_o = 1$, $\lambda_k = 0$ para k distinto de cero. Este punto satisface todas las restricciones en forma de igualdad, tanto las restricciones relacionadas con los inputs, como las restricciones relacionadas con los outputs, como la restricción sobre rendimientos variables a escala. No es difícil ver que algunas restricciones no son activas. Tomemos, por ejemplo, las relacionadas con los inputs, que toman la forma:

$$\sum_{k=1}^{K} \lambda_k \, x_{ik} \leq x_{io}$$

Se trata de un haz de ecuaciones con un eje común: $\lambda_o = 1$ y $\lambda_k = 0$ para todo valor de k distinto de o. Uno solo de estos hiperplanos limita la región factible, los otros están allí pero no son activos. Sólo se convierten en activos cuando se trata de calcular los costos marginales. Nótese que la restricción que se necesita en el caso de rendimientos variables a escala también pertenece a este haz de ecuaciones. Todas las restricciones asociadas con los outputs tienen un punto en común: z = 1, $\lambda_o = 1$, $\lambda_k = 0$ para k distinto de cero. Solamente de ellas una de ellas limita la región factible, aunque todas se satisfacen en forma de igualdad en el óptimo.

Dado que costes marginales y valores duales no coinciden, ¿cómo están relacionados los costes marginales con los valores duales? Esta pregunta también la responde la teoría; [16]. Dada una restricción, el coste marginal asociado con ella es el menor de los valores duales entre todas las soluciones duales obtenidas. Este valor se puede obtener simplemente relajando la restricción en una unidad y viendo como cambia el valor de la función objetivo. Nótese que esta regla se cumple en la Tabla 2. Para la primera restricción tenemos dos valores duales obtenidos a partir de la solución primal: 0.06046 y 0.04182. El valor obtenido por medio del método de la relajación es el menor de los dos: 0.04182. Exactamente lo mismo sucede con la segunda restricción. La solución del primal nos genera dos valores duales: 0.02325 y 0.03421. El método de la relajación nos encuentra el más bajo de los dos: 0.02325.

Los costes marginales obtenidos tal como arriba se detalla, no son totalmente correctos. Es necesario hacer una corrección que es consecuencia directa de la formulación multiplicador. Si valoramos los inputs y los outputs según sus costes marginales el valor total debería de ser uno. Así tenemos en el caso de la DMU 4,

10 * 0.04182 + 17 * 0.02325 = 0.81345

Dividiendo los costos marginales por 0.81345 obtenemos los costes marginales adecuados, que son 0,05141 y 0,02858. Estos valores se muestran en la última columna de la Tabla 2, titulada “Final”.

## 6. Costes marginales con valor cero

El problema conocido como "pesos cero" surge cuando una variable dual toma el valor cero. Las variables duales tienen como valor mínimo cero, de lo que se sigue que, si aplicamos la regla anterior, el coste marginal del recurso será cero. Hace tiempo que se ha considerado absurdo el dar un valor nulo a un recurso, bien sea un input bien sea un output;[11].

Pero, pensemos, ¿qué significa que un valor dual es cero? Recordemos que los valores duales son las componentes de los vectores ortogonales a los hiperplanos que forman la envolvente, y recordemos también que si hay varios valores duales es porque en un punto de la envolvente interseccionan varios hiperplanos. En el simple caso presentado en la Figura 2, vemos que si calculamos la eficiencia de la DMU 2 encontraremos una solución con dos valores duales positivos y otra solución en la cual uno de los valores duales será cero porque uno de los segmentos de la envolvente es vertical. Este segmento es vertical porque el algoritmo está intentando aproximar una curva asintótica al eje vertical por medio de una recta, y esto es imposible. De hecho la vertical sólo aproxima bien a la curva en el infinito. Es decir, si tuviéramos una cantidad infinita del segundo input en la figura 2, éste tomaría el valor cero, lo cual no deja de ser razonable. ¿Por qué aceptar un coste marginal que sólo es válido cuando tenemos cantidades infinitas del input 2? ¿No sería más lógico aceptar como valor correcto el último que se ha demostrado en la práctica? Es decir, el valor mínimo entre los que no son cero. Esto sería consistente con razonar que en el punto $P_2$ no sabemos cómo continua la envolvente, pero que si fuera curva tendría cómo tangente la pendiente del segmento $P_2P_4$. ¿Podríamos usar otra tangente más pequeña que la pendiente del segmento $P_2P_4$? Ciertamente, pero la filosofía del DEA nos dice que hay que usar los valores que se han demostrado en la práctica. Por lo tanto, es consistente con esta filosofía el aceptar como valor apropiado el mínimo observado, el más pequeño de los valores duales, y no cero.

## 7. Conclusión

Hace mucho tiempo que se viene observando que las relaciones entre los valores duales en el DEA no siempre responden a las expectativas. De aquí ha nacido la práctica de imponer restricciones sobre los pesos; [11, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25].

El análisis que se ha presentado en este trabajo, basado en la teoría de la degeneración en la programación lineal, sugiere que el ratio entre los valores de dos pesos depende de la solución elegida y, en ausencia de un criterio de selección entre soluciones alternativas, del azar. La solución clásica de este problema es establecer restricciones a priori en los pesos, aunque ello crea una distorsión arbitraria en la forma de la función de producción; [20]. Pero interferir con los resultados del modelo antes de conocerlos no sólo es un modo curioso de proceder sino que va contra la filosofía del DEA, que se basa en aprender de lo observado en la práctica. Aquí se ha presentado una metodología, basada en la teoría de la degeneración en la programación lineal, que permite elegir los pesos de modo sistemático y que es consecuente con la lógica de las relaciones entre el primal y el dual. Tal vez no obvia la necesidad de imponer restricciones sobre los pesos, pero esto sería una decisión tomada a posteriori con pleno conocimiento de causa.

**Agradecimientos**

Este trabajo ha sido posible gracias a una beca Ramón y Cajal del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

**Referencias**

[1] Thanassoulis, E. (2001) *Introduction to the theory and application of Data Envelopment Analysis: a foundation text with integrated software*. Kluwer Academic Publishers.

[2] Cooper, W.W.; Seiford, L.M.; y Tone, K. (2000) *Data Envelopment Analysis: a comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software*. Kluwer Academic Publishers.

[3] Ganley, J.A,; y Cubbin, J.S. (1992) *Public sector efficiency measurement: applications of data envelopment analysis*. North Holland.

[4] Norman, M.; y Stocker, B. (1991) *Data Envelopment Analysis, the assessment of performance*. Wiley.

[5] Heathfield, D.F.; y Wibe, S. (1987) *An introduction to cost and production functions*. Macmillan.

[6] Charnes, A., Cooper, W.W., y Rhodes, E., (1978) "Measuring the efficiency of decision making units", *European Journal of Operational Research*, 2, pp. 429-444.

[7] Banker, R.D.; Charnes, A.; y Cooper, W.W. (1984) Some models for estimating technical and scale efficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30, 1078-1092.

[8] Land, A. (1991) Data envelopment analysis. Capítulo 5 en SC Littlechild and MF Shutler editores "*Operations research in management*". Prentice Hall, London, UK.

[9] Dorfman, R.; Samuelson, P.; y Solow, R. (1958) *Linear programming and economic analysis*. McGraw-Hill.

[10] Rosen, D.; Schaffnit, C.; y Paradi, J.C. (1998) Marginal rates and two-dimensional level curves in DEA. *Journal of Productivity Analysis*, 9, 205-232.

[11] Dyson, R.G.; y Thanassoulis, E. (1988) Reducing weight flexibility in Data Envelopment Analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 39, 563-576.

[12] Thompson, R.G.; Dharmapala, P.S.; y Thrall, R.M. (1993) Importance for DEA of zeros in data, multipliers, and solutions. *The Journal of Productivity Analysis*, 4, 379-390.

[13] Ali, A.I. (1993) Streamlined computation for data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 64, 61-67.

[14] Charnes, A. (1952) Optimality and degeneracy in linear programming. *Econometrica*, 20, 166-170.

[15] Williams, A.C. (1963) Marginal values in linear programming. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11, 82-94.

[16] Aucamp, D. C., y Steinberg, D. I., (1982) The computation of shadow prices in Linear Programming. *Journal of the Operational Research Society*, 33, pp. 557-565.

[17] Shapiro, J.F. (1979) *Mathematical programming: structures and algorithms*. John Wiley & Sons. New York.

[18] Aucamp, D.C. (1984) Graphical analysis of duality and the Kuhn-Tucker conditions in linear programming. *Applied Mathematical Modelling*, 8, 238-242.

[19] Allen, R.; Athanassopoulos, A.; Dyson, R.G.; y Thanassoulis, E. (1997) Weights restrictions and value judgements in Data Envelopment Analysis: evolution, development and future directions. *Annals of Operational Research*, 73, 13-34.

[20] Banker, R.D.; y Morey, R.C. (1989) Incorporating value judgements in Data Envelopment Analysis. *Research in Governmental and Nonprofit Accounting*, 5, 245-267.

[21] Beasley; J.E. (1990) Comparing university departments. *Omega*, 18, 171-183.

[22] Wong, Y-H. B.; y Beasley, J.E. (1990) Restricting weight flexibility in Data Envelopment Analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 41, 829-835.

[23] Roll, Y.; y Golany, B. (1993) Alternate methods of treating factor weights in DEA. *Omega*, 21, 99-109.

[24] Pedraja-Chaparro, F.; Salinas-Jimenez, J.; y Smith, P. (1997) On the role of weight restrictions in Data Envelopment Analysis. Journal of Productivity Analysis, 8, 215-230.

[25] Pedraja-Chaparro, F.; y Salinas-Jimenez, J. (1996) An assessment of the efficiency of Spanish courts using DEA. *Applied Economics*, 28, 1391-1403.