

## Agregación temporal en el Análisis por Envoltura de Datos

Gabriel Villa Caro<sup>1</sup>, Marcos Calle Suárez<sup>2</sup>, José Manuel García Sánchez<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Ingeniero Industrial. Dpto. Organización Industrial y Gestión de Empresas. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla. Camino de los Descubrimientos s.n., 41092 – Sevilla. gvilla@esi.us.es

<sup>2</sup> Ingeniero de Organización Industrial. Dpto. Organización Industrial y Gestión de Empresas. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla. Camino de los Descubrimientos s.n., 41092 – Sevilla. mcalles@esi.us.es

<sup>3</sup> Ingeniero Informático. Dpto. Organización Industrial y Gestión de Empresas. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla. Camino de los Descubrimientos s.n., 41092 – Sevilla. jmgs@esi.us.es

### RESUMEN

*Este trabajo examina los efectos de la agregación temporal de los datos de entrada y salida usados mediante el Análisis por Envoltura de Datos (DEA). Se supone que estos datos son recogidos de un número determinado de micro-periodos. El objetivo de esta investigación no será tanto medir la evolución de la eficiencia con el tiempo, sino estudiar cuáles son los efectos del nivel de agregación temporal que se use. Se han realizado dos técnicas para el análisis. La primera consiste en agregar las entradas y salidas usando diferentes tamaños de intervalos temporales. La segunda se basa en el uso de un modelo DEA convencional, pero usando unas entradas y salidas a las que se les ha aplicado un ajuste exponencial. Ambas técnicas se han desarrollado bajo diferentes tipos de escenarios.*

**Palabras clave:** DEA, agregación temporal, ajuste exponencial.

### 1. Introducción.

El Análisis por Envoltura de Datos (DEA) es una herramienta de programación lineal que mide la eficiencia relativa de unidades productivas que fabrican de forma similar, llamadas DMUs. Para ello, sólo es necesario conocer por una parte la cantidad que es consumida de cada recurso por cada DMU, y por otra, la cantidad de cada producto que es generado por cada unidad productiva [1].

Es fundamental en el desarrollo de los problemas en donde se aplica el Análisis por Envoltura de Datos la medición de las entradas y de las salidas. Habitualmente, en la recogida de estos datos, no es objeto del estudio cuál es el periodo de tiempo en el que las cantidades de entradas y salidas son medidas. Sin embargo, el análisis de la eficiencia de las unidades productivas a lo largo de periodos consecutivos en el tiempo sí que ha sido tratado en la literatura mediante el Análisis de Ventana (Windows Analysis) [2] y el índice de productividad de Malmquist [3]. Los lectores interesados en profundizar los aspectos dinámicos de los modelos DEA pueden referirse a Sengupta [4].

En este artículo se trata de analizar cuál debe ser el nivel óptimo de agregación de los periodos de tiempo. Aunque se va a hacer la suposición de que los datos de entrada y salida para cada DMU serán obtenidos mediante periodos de tiempos consecutivos, el análisis a

realizar será previo y compatible con los modelos DEA dinámicos referidos anteriormente, ya que el interés reside en determinar el nivel de agregación adecuado de estos micro-periodos.

En el apartado segundo del trabajo se presenta el modelo DEA de agregación temporal. Posteriormente, en el tercer apartado se mostrarán los resultados obtenidos para dos casos, donde se estudiará la influencia de la agregación de periodos respecto al error que se comete si se considerara como verdadera eficiencia la obtenida por los valores medios. Con el objeto de confluir las reducciones y ampliaciones desarrolladas en las dos fases del modelo, se utiliza la expresión de la eficiencia “Measure of Efficiency Dominance” desarrollada por Bardhan [5]. Debido a que el modelo de agregación temporal que se presenta agrega un número finito de periodos asignando a cada uno el mismo peso, en el apartado 4 se contempla la alternativa de hacer que esos pesos no sean iguales mediante un alisamiento exponencial y los experimentos que se derivan de la técnica propuesta en el anterior apartado. Por último se finalizará con un resumen y conclusiones de todo lo desarrollado.

## 2. Modelo DEA de agregación temporal.

En esta sección se presenta un modelo DEA que se deriva del convencional, pero que incluye los intervalos de tiempo usados en la medición de las entradas y salidas. Para un problema con ‘n’ unidades productivas, cada una de las cuales consumiendo ‘m’ entradas y produciendo ‘p’ salidas, y operando con retornos de escala constantes y con orientación de entrada, el modelo quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \theta_j^{[a,b]} - \varepsilon \left[ \sum_{i=1}^m s_{ij}^{[a,b]} + \sum_{k=1}^p t_{kj}^{[a,b]} \right] \\ &\text{s.a.} \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_{ij}^{[a,b]} x_{ij}^{[a,b]} = \theta_j^{[a,b]} x_{ij}^{[a,b]} - s_{ij}^{[a,b]} \quad \forall i \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_{ij}^{[a,b]} y_{kj}^{[a,b]} = y_{kj}^{[a,b]} + t_{kj}^{[a,b]} \quad \forall k \\ &\lambda_{ij}^{[a,b]}, s_{ij}^{[a,b]}, t_{kj}^{[a,b]} \geq 0 \quad \theta_j^{[a,b]} \text{ libre} \end{aligned} \tag{1}$$

- $x_{ij}$ : cantidad de entrada  $i$  consumida por  $DMU_j$  en el periodo  $t$ .
- $y_{kjt}$ : cantidad de salida  $k$  producida por  $DMU_j$  en el periodo  $t$ .
- $x_{ij}^{[a,b]}$ : consumo agregado de la entrada  $i$  por  $DMU_j$  durante el intervalo  $[a,b]$ .
- $y_{kj}^{[a,b]}$ : producción agregada de la salida  $k$  por  $DMU_j$  durante el intervalo de tiempo  $[a,b]$ .
- $\theta_j^{[a,b]}$ : eficiencia radial de la  $DMU_j$  para el intervalo de tiempo  $[a,b]$ .
- $(\lambda_{1j}^{[a,b]}, \lambda_{2j}^{[a,b]}, \dots, \lambda_{nj}^{[a,b]})$ : vector de proyección de la  $DMU_j$  en el periodo  $[a,b]$ .
- $s_{ij}^{[a,b]}$ : proyección rectangular de la entrada  $i$  de la  $DMU_j$  en el intervalo  $[a,b]$ .
- $t_{kj}^{[a,b]}$ : proyección rectangular de la salida  $k$  de la  $DMU_j$  en el intervalo  $[a,b]$ .

Una vez resuelto el modelo, es posible realizar el cálculo de los consumos y los productos que la solución determina para cada unidad productiva. Así pues, si los valores en el óptimo de las variables de la segunda fase son  $(\hat{\lambda}_{ij}^{[a,b]}, \hat{s}_{ij}^{[a,b]}$  y  $\hat{t}_{kj}^{[a,b]})$  el consumo en el periodo temporal contenido en el intervalo  $[a,b]$  del recurso  $i$  que la unidad  $J$  debe consumir según el modelo puede expresarse como:

$$\hat{x}_{ij}^{[a,b]} = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_{ij}^{[a,b]} x_{ij}^{[a,b]} = \hat{\theta}_J^{[a,b]} x_{ij}^{[a,b]} - \hat{s}_{ij}^{[a,b]} \quad (2)$$

Asimismo, la producción en el intervalo [a,b] que la unidad J debe generar de salida k corresponde a la expresión:

$$\hat{y}_{kj}^{[a,b]} = \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_{ij}^{[a,b]} y_{kj}^{[a,b]} = y_{kj}^{[a,b]} + \hat{t}_{kj}^{[a,b]} \quad (3)$$

Calculando la eficiencia mediante la expresión del MED:

$$MED_J^{[a,b]} = 1 - \frac{1}{m+p} \left[ \sum_{i=1}^m \frac{x_{ij}^{[a,b]} - \hat{x}_{ij}^{[a,b]}}{x_{ij}^{[a,b]}} + \sum_{k=1}^p \frac{\hat{y}_{kj}^{[a,b]} - y_{kj}^{[a,b]}}{\hat{y}_{kj}^{[a,b]}} \right] \quad (4)$$

De esta forma,  $DMU_J$  es eficiente para el intervalo comprendido entre a y b si y sólo si  $MED_J^{[a,b]} = 1$ .

### 3. Resultados numéricos.

Se han considerado dos aplicaciones: la primera consta de una sola entrada y una sola salida (en adelante caso XY). Hay que hacer notar que para este caso no es necesaria la aplicación de la fase II del modelo. Por otro lado, se ha analizado un segundo caso (caso XX1) con dos entradas y una salida constante e igual a uno. Para este último caso, ha sido utilizado el software EMS (Efficiency Measure System).

#### 3.1. Caso XY.

Este caso representa a 6 unidades a lo largo de 24 periodos, con una sola entrada y una sola salida, que fueron obtenidos de forma aleatoria:

$$\begin{aligned} x_{jt} &= \bar{x}_j + \varepsilon_{jt} & \text{con } \varepsilon_{jt} &\equiv N(0, \alpha_j) \\ y_{jt} &= \bar{y}_j + \phi_{jt} & \text{con } \phi_{jt} &\equiv N(0, \beta_j) \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $\varepsilon_{jt}$  y  $\phi_{jt}$  son variables aleatorias que responden respectivamente a las siguientes distribuciones normales:  $N(0, \alpha_j)$  y  $N(0, \beta_j)$ . Los valores usados para los parámetros introducidos se muestran en la Tabla 1.

DMU	INICIAL					AVANCE			RECESO		
	$\bar{x}_j$	$\bar{y}_j$	$\alpha_j$	$\beta_j$	Efic. reales	Cambio en $\bar{x}_j$ y $\alpha_j$	Cambio en $\bar{y}_j$ y $\beta_j$	Efic. reales	Cambio en $\bar{x}_j$ y $\alpha_j$	Cambio en $\bar{y}_j$ y $\beta_j$	Efic. reales
<b>1</b>	25	40	2	5	0.80	0.986	1.068	0.734	1.099	0.999	0.791
<b>2</b>	30	60	4	6	1.00	0.924	1.091	1.000	1.049	0.905	0.940
<b>3</b>	40	40	3	8	0.50	0.904	1.078	0.505	1.078	0.946	0.478
<b>4</b>	45	90	5	5	1.00	0.922	1.030	0.946	1.047	0.962	1.000
<b>5</b>	50	65	4	3	0.65	0.911	1.045	0.632	1.005	0.951	0.669
<b>6</b>	60	90	5	10	0.75	0.964	1.060	0.698	1.070	0.954	0.728

Tabla 1: Valores esperados, desviaciones estándar y "eficiencias reales", en la situación inicial, avance y receso.

El objetivo de este experimento radica en comprobar si la agregación temporal reduce el error en la estimación de estas “verdaderas eficiencias”. La siguiente tabla muestra los resultados de distintos estadísticos analizados al efecto:

t	DMU 1					DMU 2					DMU 3				
	Tamaño del intervalo temporal					Tamaño del intervalo temporal					Tamaño del intervalo temporal				
	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6
<b>Bias(%)</b>	-7.6	-5.7	-4.3	-2.6	0.1	-6.5	-5.5	-4.6	-3.7	-2.4	-10.2	-8.0	-6.9	-5.7	-3.5
<b>MAD(%)</b>	13.0	9.6	7.2	5.5	5.1	6.5	5.5	4.6	3.7	2.4	27.9	19.0	13.9	10.6	5.2
<b>MAC(%)</b>	16.3	10.1	5.4	4.5	2.9	8.5	5.3	3.9	2.9	1.9	36.6	20.0	14.6	10.4	5.0

t	DMU 4					DMU 5					DMU 6				
	Tamaño del intervalo temporal					Tamaño del intervalo temporal					Tamaño del intervalo temporal				
	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6
<b>Bias(%)</b>	-9.7	-8.0	-7.0	-5.3	-3.0	-7.8	-6.3	-5.5	-4.3	-2.5	-8.2	-7.2	-6.5	-5.3	-4.0
<b>MAD(%)</b>	9.7	8.0	7.0	5.3	3.0	13.5	9.7	7.9	6.1	4.1	14.3	8.6	8.4	7.3	6.4
<b>MAC(%)</b>	12.6	7.5	5.1	3.5	2.5	14.3	8.0	6.6	4.3	3.4	24.9	9.2	7.9	5.6	4.1

Tabla 2: Cálculos realizados a partir de las eficiencias obtenidas.

De los valores de la Tabla 2 se puede concluir que, para todas las DMUs del problema, cuanto mayor es el nivel de agregación, más pequeño son el Bias, la desviación absoluta del error (MAD), y el cambio absoluto medio (MAC), cuyas expresiones son las siguientes:

$$\text{Bias}_j = \frac{1}{(T-t+1)} \sum_{a=1}^{T-t+1} \frac{(\text{MED}_j^{[a,a+t-1]} - \text{EF}_j)}{\text{EF}_j} \quad (6)$$

$$\text{MAD}_j = \frac{1}{(T-t+1)} \sum_{a=1}^{T-t+1} \frac{|\text{MED}_j^{[a,a+t-1]} - \text{EF}_j|}{\text{EF}_j} \quad (7)$$

$$\text{MAC}_j = \frac{1}{(T-t)} \sum_{a=1}^{T-t+1} \frac{|\text{MED}_j^{[a,a+t-1]} - \text{MED}_j^{[a+1,a+t]}|}{\text{EF}_j} \quad (8)$$

donde  $\text{EF}_j$  es la eficiencia verdadera de la unidad  $\text{DMU}_j$ .

Realizado este análisis, se analiza un cambio de tecnología en los siguientes 24 periodos. En un primer caso se contempla un avance tecnológico consistente en un aumento de las salidas y una disminución de las entradas de todas las DMUs del problema. Se ha supuesto un ratio de mejora para la salida uniformemente distribuido en el intervalo [1; 1.1], y un ratio de disminución de la entrada también distribuido uniformemente en el intervalo [0.9; 1]. En la Tabla 1 se muestran para cada unidad productiva las mejoras esperadas en la entrada y la salida para esta nueva situación, así como los valores de eficiencia que se esperan obtener.

Las mejoras propuestas en este apartado se aplicarán de forma completa a partir del periodo 30, ya que del 25 al 29 se considerará un intervalo de transición en donde dichas mejoras se consiguen de forma progresiva. Esto se conseguirá realizando una interpolación lineal de los valores esperados.

Puede deducirse de la Tabla 3 el comportamiento decreciente del error que se obtiene a través del MAD y del MAC. Sin embargo no existe una tendencia clara en la evolución del Bias. Aún así se puede concluir que el peor de los valores se obtiene con un grado de agregación de un intervalo, y que para las DMUs 1, 2 y 4 el comportamiento es claramente descendente.

t	DMU 1					DMU 2					DMU 3				
	Tamaño del intervalo temporal					Tamaño del intervalo temporal					Tamaño del intervalo temporal				
	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6
<b>Bias(%)</b>	-7.8	-5.2	-5.4	-2.6	0.1	-6.5	-5.5	-4.6	-3.7	-2.4	-10.2	-8.0	-6.9	-5.7	-3.5
<b>MAD(%)</b>	15.9	12.1	10.1	5.5	5.1	6.5	5.5	4.6	3.7	2.4	27.9	19.0	13.9	10.6	5.2
<b>MAC(%)</b>	21.9	9.2	6.4	4.5	2.9	8.5	5.3	3.9	2.9	1.9	36.6	20.0	14.6	10.4	5.0

t	DMU 4					DMU 5					DMU 6				
	Tamaño del intervalo temporal					Tamaño del intervalo temporal					Tamaño del intervalo temporal				
	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6
<b>Bias(%)</b>	-5.3	-2.3	-2.4	-5.3	-3.0	-7.8	-6.3	-5.5	-4.3	-2.5	-8.2	-7.2	-6.5	-5.3	-4.0
<b>MAD(%)</b>	9.6	7.7	7.3	5.3	3.0	13.5	9.7	7.9	6.1	4.1	14.3	8.6	8.4	7.3	6.4
<b>MAC(%)</b>	13.0	6.9	5.8	3.5	2.5	14.3	8.0	6.6	4.3	3.4	24.9	9.2	7.9	5.6	4.1

Tabla 3: Cálculos realizados a partir de las eficiencias obtenidas en el caso de avance tecnológico.

Se presenta a continuación un segundo escenario, en donde se analizan las consecuencias de un receso en la tecnología. La Tabla 1 mostraba los valores de cambio que se proponen en las entradas y las salidas de cada unidad productiva. Corresponden a modificar los productos por un valor uniformemente distribuido en el intervalo  $[0.9; 1]$ , y los recursos por un valor entre  $[1; 1,1]$ , también distribuido de manera uniforme.

Los valores de eficiencias obtenidos en este caso se muestran en la Tabla 4:

t	DMU 1					DMU 2					DMU 3				
	Tamaño del intervalo temporal					Tamaño del intervalo temporal					Tamaño del intervalo temporal				
	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6
<b>Bias(%)</b>	-8.1	-5.7	-4.5	-3.8	-2.2	-6.5	-4.9	-4.8	-4.4	-3.2	-3.1	-0.8	0.5	0.6	1.6
<b>MAD(%)</b>	13.3	9.6	8.1	6.1	3.6	11.9	9.2	7.2	7.1	7.2	18.0	11.7	8.6	6.6	3.4
<b>MAC(%)</b>	18.3	9.0	6.5	5.2	3.4	14.1	9.6	4.5	4.6	3.4	23.8	14.8	9.5	8.1	4.5

t	DMU 4					DMU 5					DMU 6				
	Tamaño del intervalo temporal					Tamaño del intervalo temporal					Tamaño del intervalo temporal				
	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6
<b>Bias(%)</b>	-5.1	-3.4	-2.6	-1.8	-0.7	2.0	3.6	4.9	5.3	5.9	1.9	4.0	4.6	5.2	6.4
<b>MAD(%)</b>	5.1	3.4	2.6	1.8	0.7	11.9	7.8	7.0	5.5	5.9	9.1	7.1	5.7	5.8	6.4
<b>MAC(%)</b>	6.3	3.3	2.2	1.9	0.4	17.3	8.9	6.4	3.3	2.8	13.6	9.2	3.8	5.3	2.4

Tabla 4: Cálculos realizados a partir de las eficiencias obtenidas en el caso de receso tecnológico.

De nuevo el MAC, como ocurría en el escenario anterior, mantiene un comportamiento decreciente ante aumentos en los tamaños de los intervalos. Sin embargo, se observa que mientras que la evolución del MAD tiene un comportamiento en la mayoría de los casos decreciente, el Bias es siempre creciente. Se observan valores negativos para las unidades 1, 2 y 4. Esto es debido a que se está subestimando la eficiencia en el periodo transitorio. Sin embargo, como es de esperar, el Bias evoluciona hacia valores menos negativos en estas unidades a medida que la agregación temporal aumenta. Ambos escenarios se muestran al final del documento en la Figura 1.

### 3.2. Caso XX1.

Se presenta a continuación un caso similar al apartado anterior, en el que están involucradas dos entradas y una sola salida constante e igual a uno. Se analiza de nuevo un escenario compuesto por 24 periodos de tiempo, en donde se estudiarán los errores cometidos al agregar en diferentes intervalos de tiempo los datos de entradas y salidas, obtenidos de forma aleatoria. Posteriormente se analizarán dos escenarios correspondientes a una mejora y a un empeoramiento tecnológico respectivamente, para estudiar los efectos que se producen en la agregación de los datos de entradas y salidas. En la Tabla 5 se resumen los datos utilizados en esta aplicación.

	DMU 1	DMU 2	DMU 3	DMU 4	DMU 5	DMU 6
Entrada 1 esperada	15	25	30	40	45	50
Entrada 2 esperada	60	35	80	25	90	40
Desviación estándar entrada1	5	2	8	3	5	4
Desviación estándar entrada2	4	6	5	4	10	6
Eficiencia real (1-24)	1.000	1.000	0.629	1.000	0.482	0.705
Cambio entrada1 (avance)	0.912	0.999	0.977	0.925	0.918	0.971
Cambio entrada2 (avance)	0.967	0.998	0.941	0.937	0.983	0.982
Eficiencia real (30-48)	1.000	1.000	0.636	1.000	0.497	0.686
Cambio entrada1 (retroceso)	1.064	1.072	1.079	1.080	1.076	1.043
Cambio entrada2 (retroceso)	1.092	1.074	1.057	1.099	1.014	1.089
Eficiencia real (30-48)	1.000	1.000	0.635	1.000	0.494	0.715

Tabla 5: Datos usados para el caso XX1.

En esta ocasión, el cambio en la frontera eficiente y en las unidades productivas respecto a la situación esperada puede ser representada mediante la siguiente Figura 2.

En la Tabla 6 se resumen los estadísticos obtenidos en dichos escenarios. Se puede observar que para las unidades eficientes del problema (DMU<sub>1</sub>, DMU<sub>2</sub> y DMU<sub>4</sub>) se tienen unos valores muy pequeños de los estadísticos, con independencia del tamaño del intervalo temporal que se escoja. También es notable el hecho de que tanto el MAD como el MAC mantienen un comportamiento decreciente de forma sistemática a medida que el intervalo temporal es mayor. Sin embargo, de nuevo el Bias no tiene una evolución definida en su comportamiento: a veces es creciente, a veces constante, a veces decreciente.

En resumen, estos resultados no dan una indicación clara de cuál es el tamaño de intervalo temporal más adecuado para reducir el error que se comete con respecto a las eficiencias verdaderas.

DMU	24 periodos iniciales														
	Bias (%)					MAD (%)					MAC (%)				
	Tamaño de intervalo					Tamaño de intervalo					Tamaño de intervalo				
	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6
1	-0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0
2	-0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.8	0.0	0.0	0.0	0.0
3	12.0	9.3	7.7	6.5	4.0	16.7	12.0	9.8	7.8	5.0	22.6	13.7	7.9	5.1	3.0
4	-1.8	-0.7	-0.3	0.0	0.0	1.8	0.7	0.3	0.0	0.0	2.8	1.4	0.7	0.0	0.0
5	3.6	3.2	3.1	3.1	3.1	6.1	4.7	4.4	3.9	3.6	8.6	4.8	2.9	2.4	1.8
6	-1.4	-0.7	-1.0	-1.5	-1.8	11.6	8.9	6.5	5.8	3.9	14.5	9.3	5.1	4.9	2.9

Escenario de avance tecnológico															
	Bias (%)					MAD (%)					MAC (%)				
	Tamaño de intervalo					Tamaño de intervalo					Tamaño de intervalo				
DMU	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	-1.6	-0.6	0.0	-0.1	0.0	1.6	0.6	0.0	0.1	0.0	3.4	0.9	0.0	0.3	0.0
3	-2.8	-3.9	-4.3	-4.7	-4.5	11.8	8.1	6.0	5.6	5.1	17.6	8.3	4.0	3.8	2.4
4	-0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0
5	-0.9	-1.3	-0.9	-1.2	-1.5	10.2	7.0	5.4	4.8	3.1	15.7	8.3	4.9	4.4	2.6
6	0.7	0.4	0.6	0.4	0.4	8.8	6.8	5.7	4.8	3.2	11.0	6.2	5.6	3.8	2.5
Escenario de retroceso tecnológico															
	Bias (%)					MAD (%)					MAC (%)				
	Tamaño de intervalo					Tamaño de intervalo					Tamaño de intervalo				
DMU	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6	1	2	3	4	6
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	-1.1	-0.6	-0.4	0.0	0.0	1.1	0.6	0.4	0.0	0.0	1.8	0.9	0.7	0.0	0.0
3	3.2	1.3	0.8	0.9	1.7	15.7	10.8	8.4	7.5	6.4	22.7	10.2	5.2	4.5	3.3
4	-2.1	-0.3	-0.2	0.0	0.0	2.1	0.3	0.2	0.0	0.0	4.4	0.5	0.5	0.0	0.0
5	6.8	4.4	4.1	3.5	3.0	12.9	6.8	5.2	4.0	3.3	19.4	9.8	5.1	3.1	2.6
6	-2.3	-0.4	0.4	1.2	1.8	9.6	4.7	4.0	3.8	3.5	15.2	5.1	4.1	2.2	1.4

Tabla 6: Resultados de los estadísticos analizados para el caso XX1, tanto en los primeros 24 periodos como en los escenarios de avance y retroceso tecnológico.

#### 4. Alisamiento exponencial de entradas y salidas.

El modelo de agregación temporal presentado agrega un número finito de periodos que da a cada uno el mismo peso. Una alternativa es hacer que esos pesos no sean iguales mediante un alisamiento exponencial:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{ijt} &= \pi_i x_{ijt} + (1 - \pi_i) \hat{x}_{ijt-1} = \pi_i x_{ijt} + (1 - \pi_i) [\pi_i x_{ijt-1} + (1 - \pi_i) \hat{x}_{ijt-2}] = \\ &= \pi_i [x_{ijt} + (1 - \pi_i) x_{ijt-1} + (1 - \pi_i)^2 x_{ijt-2} + (1 - \pi_i)^3 x_{ijt-3} + \dots]\end{aligned}\quad (9)$$

donde  $x_{ijt}$  es el recurso  $i$  consumido por la unidad  $j$  en el periodo  $t$ ;  $\hat{x}_{ijt}$  es el recurso  $i$  consumido por la unidad  $j$  medido en el periodo  $t$ , teniendo en cuenta los periodos anteriores; y  $\pi_i$  es el coeficiente de alisamiento contenido en el intervalo  $(0,1)$  que se le asigna al recurso  $i$  en el periodo  $t$ .

Asimismo, para las salidas del problema, y teniendo en cuenta que  $y_{kjt}$  es el producto  $k$  generado por la unidad  $j$  en el periodo  $t$ ;  $\hat{y}_{kjt}$  es el producto  $k$  generado por la unidad  $j$  medido en el periodo  $t$ , teniendo en cuenta los periodos anteriores; y  $\chi_k$  es el coeficiente de alisamiento en el intervalo  $(0,1)$  que se le asigna al producto  $k$  en el periodo  $t$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{kjt} &= \beta_k y_{kjt} + (1 - \beta_k) \hat{y}_{kjt(t-1)} = \beta_k y_{kjt} + (1 - \beta_k) \{ \beta_k y_{kjt(t-1)} + (1 - \beta_k) \hat{y}_{kjt(t-2)} \} = \\ &= \beta_k \{ x_{kjt} + (1 - \beta_k) y_{kjt(t-1)} + (1 - \beta_k)^2 y_{kjt(t-2)} + (1 - \beta_k)^3 y_{kjt(t-3)} + \dots \}\end{aligned}\quad (10)$$

Puede usarse un peso diferente para cada entrada y salida. En principio todos los intervalos son tenidos en cuenta a la hora de agregarlos, pero los más antiguos son los menos valorados.

#### 4.1. Caso XY.

En la Tabla 7 se recogen los valores obtenidos para los estadísticos utilizados en los apartados anteriores: Bias, MAD y MAC, tanto en los primeros 24 periodos, como en los restantes considerando un avance y un receso tecnológico.

Se supone un único factor de ajuste para las entradas y salidas. De nuevo se establece una situación inicial que se ve alterada por un avance y retroceso tecnológico. Se utilizarán tres valores de pesos en el análisis. Se puede observar que se han considerado diferentes valores de coeficientes de alisamiento de entrada y salida: 0.1, 0.15 y 0.25. Cuando existen evidencias de que las fluctuaciones y ruidos en las mediciones de las entradas y salidas son grandes, se utilizarán coeficientes de alisamiento pequeños, para dar más importancia a la agregación de periodos anteriores. Por otra parte, cuanto menores sean dichas fluctuaciones, mayores serán los coeficientes a utilizar, por la misma razón expuesta.

	Estadísticos (%)	CASO XY						CASO XX1					
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
$\pi=\chi=0.1$	Bias 1-24	-4.7	-0.1	-28.8	-7.0	-4.6	-3.3	0.0	0.0	21.1	0.0	4.2	-3.0
	MAD 1-24	6.1	0.1	28.8	7.0	4.9	3.7	0.0	0.0	21.1	0.0	4.2	3.0
	MAC 1-24	1.4	0.2	3.5	1.7	1.5	1.9	0.0	0.0	3.1	0.0	0.7	1.1
	Bias 30-48 Av.	1.5	-1.0	-2.1	2.1	-0.3	-2.1	0.0	0.0	-2.3	0.0	-2.0	0.5
	MAD 30-48 Av.	2.3	1.0	3.7	3.4	1.9	2.4	0.0	0.0	3.5	0.0	2.0	1.2
	MAC 30-48 Av.	1.9	0.9	3.2	1.3	1.6	1.9	0.0	0.0	1.3	0.0	1.0	1.0
	Bias 30-48 Re.	2.4	1.4	1.8	-0.2	4.9	7.5	0.0	0.0	3.7	0.0	2.2	1.0
	MAD 30-48 Re.	2.4	3.0	2.0	0.2	4.9	7.5	0.0	0.0	5.2	0.0	2.2	1.5
	MAC 30-48 Re.	1.1	1.6	1.9	0.3	0.9	0.8	0.0	0.0	1.8	0.0	1.2	0.8
$\pi=\chi=0.15$	Bias 1-24	-3.6	-0.6	-21.6	-6.0	-4.1	-3.6	0.0	0.0	16.0	0.0	3.8	-2.6
	MAD 1-24	6.0	0.6	22.1	6.0	4.8	4.5	0.0	0.0	16.0	0.0	3.8	2.8
	MAC 1-24	2.0	0.5	5.2	2.3	2.3	2.7	0.0	0.0	3.6	0.0	1.0	1.7
	Bias 30-48 Av.	-0.7	-1.8	-0.8	1.1	-1.0	-4.0	0.0	0.0	-3.5	0.0	-2.0	0.5
	MAD 30-48 Av.	2.5	1.8	4.4	4.0	3.2	4.6	0.0	0.0	4.4	0.0	2.3	1.8
	MAC 30-48 Av.	2.7	1.5	4.9	1.9	2.4	2.8	0.0	0.0	1.9	0.0	1.5	1.5
	Bias 30-48 Re.	1.8	-0.4	2.6	-0.4	5.6	7.4	0.0	0.0	2.8	0.0	2.6	1.4
	MAD 30-48 Re.	2.3	3.4	3.0	0.4	5.6	7.4	0.0	0.0	5.5	0.0	2.6	2.2
	MAC 30-48 Re.	1.7	2.4	2.9	0.4	1.3	1.3	0.0	0.0	2.6	0.0	1.8	1.2
$\pi=\chi=0.25$	Bias 1-24	-3.1	-1.6	-15.0	-5.5	-4.0	-4.1	-4.2	-4.2	5.1	-4.2	-1.1	-6.1
	MAD 1-24	5.9	1.6	17.8	5.5	5.4	6.1	4.2	4.2	13.8	4.2	7.3	7.5
	MAC 1-24	3.0	1.4	8.3	3.5	3.7	4.3	4.3	4.3	11.7	4.3	6.1	7.3
	Bias 30-48 Av.	-3.1	-2.9	-0.8	-0.4	-1.8	-5.8	0.0	0.0	-4.3	0.0	-1.7	0.5
	MAD 30-48 Av.	5.3	2.9	6.9	5.0	5.5	7.1	0.0	0.0	5.2	0.0	3.0	2.7
	MAC 30-48 Av.	4.6	2.5	8.8	3.1	4.1	4.5	0.0	0.0	3.0	0.0	2.8	2.6
	Bias 30-48 Re.	0.6	-2.2	1.8	-0.9	5.8	6.7	0.0	0.0	1.8	0.0	3.1	1.3
	MAD 30-48 Re.	2.8	4.9	3.8	0.9	5.8	6.7	0.0	0.0	6.4	0.0	3.4	2.9
	MAC 30-48 Re.	2.8	3.8	5.2	0.9	2.4	2.3	0.0	0.0	4.1	0.0	3.1	2.0

Tabla 7: Resultados de los estadísticos analizados para el caso XY y para el caso XX1, tanto en los primeros 24 periodos como en los escenarios de avance y retroceso tecnológico, para el alisamiento exponencial.

En general, puede afirmarse que a medida que el coeficiente de alisamiento crece, la asimilación de los efectos en el cambio tecnológico es más rápida, sin embargo esto no conduce, por lo general, a menores errores en las fases estables (1-24 y 30-48). Por otra parte, para todas las DMUs presentes en el problema y en todos los periodos considerados, excepto para la unidad productiva 3 en los periodos 1-24, parece que proporcionan mejores resultados



para estos datos los factores exponenciales más pequeños.

En la Figura 3 se muestra en el escenario de avance tecnológico para la unidad productiva  $DMU_1$ , las eficiencias estimadas que ha arrojado el método del alisamiento exponencial para los diferentes pesos considerados. La gráfica horizontal muestra la eficiencia verdadera para dicha unidad productiva durante los periodos 1-24 (0.8), y los periodos 30-48 (0.734). Entre ambas se encuentra la eficiencia verdadera en los periodos de transición, que como ya se comentó anteriormente, se hallan mediante interpolación lineal. Puede observarse que las eficiencias calculadas para el mayor factor exponencial muestran un comportamiento muy oscilante, pero es la que mejor responde a los cambios de tendencias (el avance tecnológico en este caso).

#### **4.2. Caso XX1.**

Es similar al ejemplo anterior XY, pero con dos entradas y una salida constante e igual a uno. Los resultados se muestran en la Tabla 7. Puede observarse en muchas ocasiones que los estadísticos utilizados obtienen un error nulo para las DMUs eficientes. Además es notable el hecho de que es el factor más pequeño el que da mejores resultados.

Comparando estos resultados con los contenidos en la Tabla 6, correspondientes al modelo de agregación temporal, se puede observar que los del alisamiento exponencial proporcionan, en general, un mejor resultado.

### **5. Resumen y conclusiones.**

En este trabajo se ha analizado el caso de la agregación temporal de los datos de entrada y salida. Se han utilizado para ello dos técnicas: la primera consiste en agregar las entradas y las salidas en intervalos temporales de diversos tamaños y, posteriormente, en analizar la eficiencia relativa de estas unidades productivas agregadas temporalmente. La segunda técnica estudiada se basa en el cálculo de alisamientos exponenciales de las entradas y las salidas usando un modelo convencional DEA (CCR-INPUT en este caso).

Con ambas técnicas se han realizado experimentos numéricos. Para la primera se ha observado que, aunque ayuda a reducir los efectos en las variaciones y ruidos de las mediciones de las entradas y salidas, en general no indica claramente cuál es el mejor nivel de agregación de periodos a usar para decrementar en lo posible los errores que se cometen. En la segunda de las técnicas desarrolladas, además de reducir también los efectos de variaciones y ruidos en las mediciones de los consumos y los productos de las unidades productivas, se ha comprobado que los menores errores se producen con factores de alisamiento pequeños.

Por otra parte, para los experimentos expuestos en este capítulo, caso XY y caso XX1, el alisamiento exponencial parece dar resultados ligeramente mejores que los proporcionados por el modelo de agregación temporal, aunque esta conclusión no puede ser generalizada sin realizar experimentos más exhaustivos.

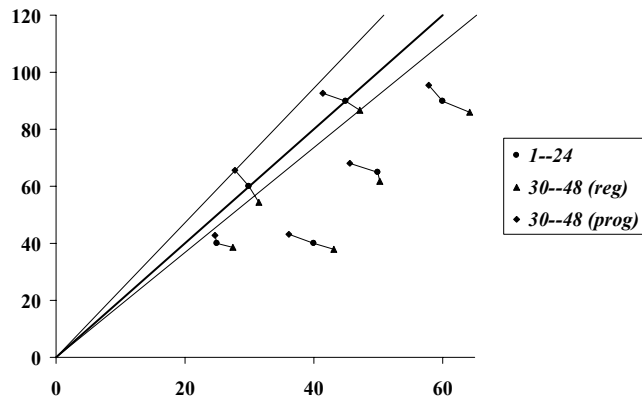


Figura 1: Cambio en las entradas y salidas esperadas con la antigua frontera y las creadas en el avance y retroceso tecnológico para el caso XY.

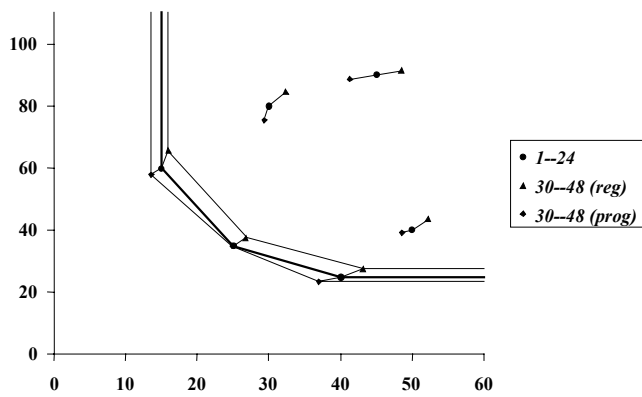


Figura 2: Cambio en las entradas y salidas esperadas con la antigua frontera y las creadas en el avance y retroceso tecnológico para el caso XX1.

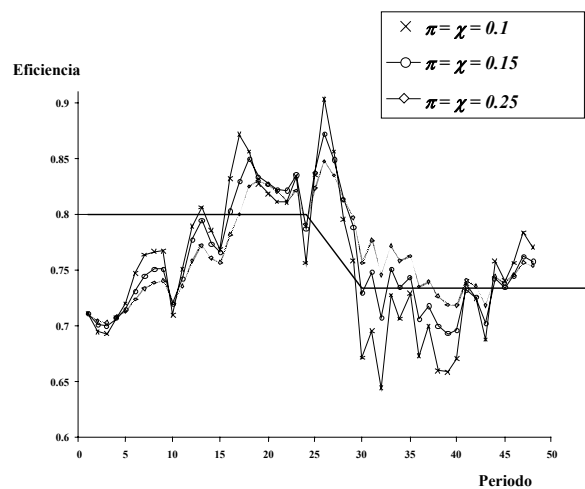


Figura 3: Eficiencia verdadera y eficiencias estimadas mediante el alisamiento exponencial para la unidad  $DMU_1$  en un escenario de avance tecnológico.

## Referencias

- [1] Cooper, W.W., Seiford, L.M. y Tone, K., (2000) “Data Envelopment Analysis. A comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software”, *Kluwer Academic Publisher*.
- [2] Charnes, A., Cooper, W.W., Lewin, A.Y. y Seiford, L.M., (1994) “Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications”, *Kluwer Academic Publisher*.
- [3] Färe, R., Grosskopf, S. Y Lovell, C.A.K., (1994) “Production Frontiers”, *Cambridge University Press*.
- [4] Bardhan, I., Bowlin, W.F., Cooper, W.W. and Sueyoshi, T., (1996) “Models and measures for efficiency dominance in DEA. Part I: Additive Models and MED Measures”, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 39, 3 322-332.
- [5] Sengupta, J.K., (1996) “Dynamics of Data Envelopment Analysis”, *Kluwer Academic Publishers*.
- [6] Charnes, A., Cooper, W.W. and Rhodes, E., (1978) “Measuring the efficiency of decision making units”, *European Journal of Operational Research*, 2 429-444.