

Utilización de los procesos de Markov para la determinación de la fiabilidad de una red eléctrica de transporte de energía

Pablo Díaz de Basurto Uraga¹, Xabier Garamendi Ruiz², Patxi Ruiz de Arbulo López²

¹ Departamento de Organización de Empresas. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Bilbao. Universidad del País Vasco. Almd. Urquijo, s/n. 48013 Bilbao. opdiurp@bi.ehu.es

² Departamento de Organización. Facultad de Ingeniería (ESIDE). Universidad de Deusto. Avda de las Universidades s/n. 48007 Bilbao. xgaramen@eside.deusto.es, parbulo@eside.deusto.es

Resumen

En este artículo se analiza un procedimiento para el cálculo de la fiabilidad de las redes de suministros eléctrico, entendiendo por fiabilidad la probabilidad de que el sistema al que pertenece la red sea capaz de atender todas las demandas instantáneas en los centros de consumo. También se proponen dos métodos alternativos para la simplificación de los complejos cálculos que resultan de la simulación aunque los resultados no son equivalentes.

Palabras clave: modelado matemático, red eléctrica, Markov

1. Modelado matemático de una red eléctrica

Sea una red eléctrica constituida por elementos E1, E2, ..., En. Cada uno de dichos elementos puede hallarse, en el instante t, a plena capacidad, con capacidad reducida al 50%, con capacidad reducida al 30 %, etc., o simplemente fuera de servicio.

Admitiendo que todos y cada unos de los elementos constitutivos de la red tienen comportamiento exponencial, es decir, las duraciones de los intervalos entre dos señales de transición de un estado a otro están ajustadas a distribuciones exponenciales, no es difícil demostrar que cada uno de los elementos de la red puede quedar modelado, en cuanto a su estado de capacidad, por un proceso markoviano cuya matriz de intensidades de transición está formada por los parámetros de las distintas distribuciones que rigen los pasos de unos estados a otros.

Si se considera, por ejemplo, el caso de una línea aérea de doble circuito, la familia de variables aleatorias

$$Z(t) \quad T \geq 0 \quad t \in \mathbb{R}$$

Representará los distintos estados de la línea para distintos valores del parámetro t. Así $Z(t) = 0$ puede significar que el instante t la línea tiene los dos circuitos en servicio; $Z(t) = 1$ que tiene el circuito uno en servicio y el dos fuera de servicio; $Z(t) = 2$ que tiene el circuito uno fuera de servicio; por último, $Z(t) = 3$ puede significar que la línea tiene los dos circuitos fuera de servicio.

En la figura 1 se representa un posible diagrama de estados de un elemento similar al analizado, y su matriz de intensidad de transición:

Diagrama de estados y matriz de intensidad

Linea de doble circuito

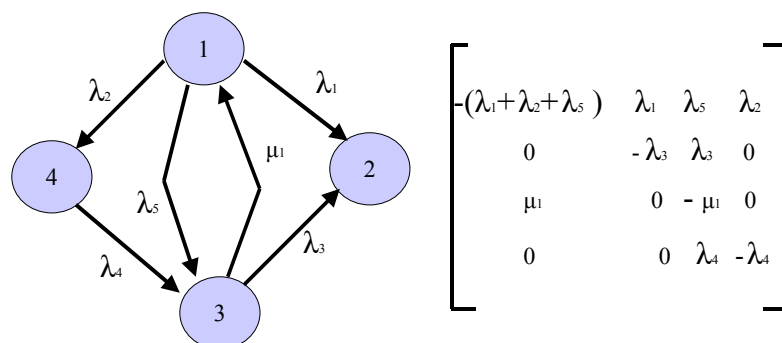


Figura 1

Se analizan, a continuación, las significaciones de los términos no pertenecientes a diagonal principal, que se deducen de suma nula de las filas.

El término $Q(1.2)$, igual a λ_1 , representa el parámetro de la distribución exponencial a la que se ajusta la avería del circuito 2 en este caso.

El término $Q(1.3)$, igual a λ_5 , representaría conceptos similares, pero ahora con avería simultánea de los dos circuitos.

El término $Q(1.4)$, igual a λ_2 , representaría los mismos conceptos que el anterior para las averías del circuito 1.

El término $Q(2.1)$, igual a 0, representaría la circunstancia de que estando averiado el circuito 2 no es posible volver de forma directa a la plena capacidad. Es este un criterio técnico que puede imponer la imposibilidad de reparar un circuito cuando el otro está en tensión por seguridad de los operarios.

El término $Q(2.3)$, igual a λ_3 , representaría la interrupción de servicio para el circuito 1 para poder reparar el circuito 2 junto con la avería del circuito 1 mientras el 2 está averiado.

El término $Q(2.4)$, igual, también, a 0, representaría la circunstancia de que no se pueden producir simultáneamente la reparación del circuito 2 y la avería del 1.

El término $Q(3.1)$, igual a μ_1 , representa la reparación de los dos circuitos o uno cualquiera de ellos para poner después los dos en servicio.

El término $Q(3.2)$ y el $Q(3.4)$, que son ambos nulos, recogen el hecho de que, técnicamente, no se puede poner en servicio una línea sin haber reparado el o los circuitos averiados, en cuyo caso la línea pasa el estado 0 pero no al 2 ó al 3.

Los términos $Q(4.1)$ y $Q(4.2)$ tendrían significaciones análogas, respectivamente, a $Q(2.1)$ y $Q(2.3)$.

El término $Q(4.3)$, igual a λ_4 , sería similar al $Q(2.4)$.

Al estudiar ahora el sistema general de la red, formada por los elementos E_1, E_2, \dots, E_n , en cada uno de los cuales puede tener un diagrama de N_1, N_2, \dots, N_n estados, ocurre que en función del estado ocupado por cada uno de sus componentes en función del estado ocupado por cada uno de sus componentes el sistema ocupará a su vez un estado distinto. La transición entre cada dos estados de la red vendrá recogida por las transiciones de los distintos elementos y, por consiguiente, también serán exponenciales. En definitiva, el comportamiento del sistema será también markoviano y el universo de estados posibles constará de $N_1 \times N_2 \times \dots \times N_n$ estados. La matriz de intensidades de los distintos elementos.

Red eléctrica modelo

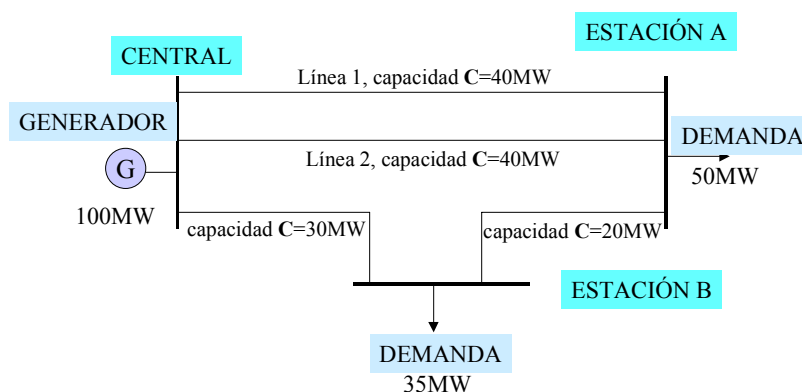


Figura 2

Considérese, a modo de ejemplo, la red sencilla de la figura 2, en la que un generador alimenta a dos subestaciones con un sistema de líneas de enlace entre los tres nudos. Sean los diagramas de estados de cada elemento los de la figura 3, en la que falta el diagrama de la línea de enlace entre la central y la subestación A que se supondrá igual al analizado anteriormente en detalle y cuyo diagrama se recogía en la figura 1.

A partir de estos diagramas es inmediato el paso al que representa la totalidad del sistema y la identificación de la matriz de intensidades de transición elementos ambos que, por su complejidad gráfica, no se han incluido en el documento.

A pesar de la simplicidad del esquema de red analizado, el Diagrama de Estados es muy complicado y, por tanto, también la matriz de transición. Una simplificación normalmente utilizada en la práctica consistente en eliminar los fallos de orden superior a dos, con lo cual el número de estados posibles se reduce notoriamente. En el ejemplo que nos ocupa, de los 48 estados que se obtienen con todos los fallos posibles, se pasa a 25 considerando solo dos fallos, es decir, con una reducción de casi el 50 %.

Diagramas de Estado

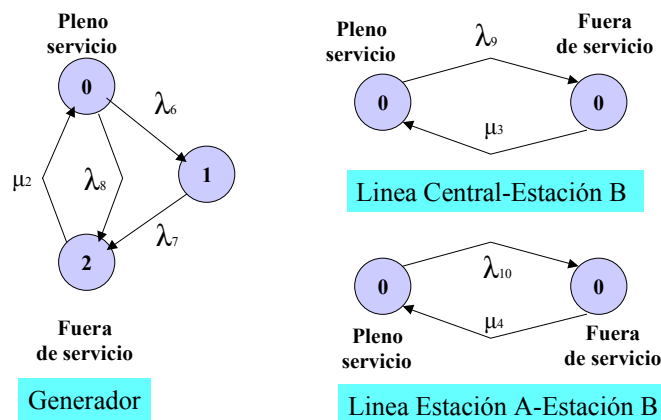


Figura 3

2. Determinación de las probabilidades de estado

Las dos ecuaciones fundamentales que definen las probabilidades relacionadas con una cadena de Markov son las denominadas de Chapman – Kolmogorov. En particular, y haciendo referencia exclusiva a la segunda de ellas, se cumple

$$\vec{P}(t) = \vec{P}(t_1) \times P(t_1, t)$$

Donde

$\vec{P}(t)$ = es el traspuesto del vector de probabilidades de estado en el tiempo t .

$\vec{P}(t_1)$ = es el traspuesto del vector de probabilidades de estado en el tiempo t_1 (supuesto $t_1 < t$) y

$P(t, t_1)$ = es la matriz de transición del tiempo t_1 al tiempo t .

Si la cadena es homogénea en el tiempo, esta expresión puede ponerse como

$$\vec{P}(t_1 + S) = \vec{P}(t_1) \times P(S)$$

Si en esta expresión se hace tender t_1 a infinito se obtienen las ecuaciones de las probabilidades asintóticas, es decir

$$\vec{P} = \vec{P} \times \vec{P} (S)$$

Y derivando con respecto a S y puesto que las probabilidades de estado permanecen constantes, se llega a la expresión

$$\vec{P} T \times \vec{Q} = 0$$

Donde \vec{Q} es la matriz de intensidad de transición, cumpliéndose

$$\vec{Q} = \frac{d}{dS} \vec{P} (S) \quad S = 0$$

Como lógicamente se ha de cumplir además que

$$\sum p_i = 1$$

Se tiene un sistema completo de ecuaciones que permite el cálculo de los distintos valores de las probabilidades asintóticas de estado.

La resolución de este sistema se hace por medio de un programa de ordenador con el que se obtienen, entre otros resultados que se analizan posteriormente, las distintas probabilidades asintóticas de los estados.

Datos

Tasas de fallo (Fallos/año)	Tasas de reparación (Reparaciones/año)
$\lambda_1=0.020$	
$\lambda_2=0.020$	
$\lambda_3=0.020$	$\mu_1=350.000$
$\lambda_4=0.130$	$\mu_2=125.000$
$\lambda_5=0.090$	$\mu_3=400.000$
$\lambda_6=0.095$	$\mu_4=400.000$
$\lambda_7=0.145$	
$\lambda_8=0.075$	
$\lambda_9=0.015$	
$\lambda_{10}=0.025$	

Figura 4

Para el ejemplo que se analiza y con los datos supuestos para los diferentes elementos de la matriz, que se recogen en la figura 4, los resultados más relevantes del diagrama completo, de 48 estados, se recogen en la figura 5.

Resultados simulación 1

Probabilidades de Estado	
$P_1=0.1006E-08$	$P_{43}=,7101E-01$
$P_2=0.1344E-12$	$P_{44}=,7101E-01$
$P_3=0.4665E-09$	$P_{45}=,4616E 00$
$P_{11}=0.1081E-08$	$P_{46}=,4652E-01$
$P_{12}=0.2016E-08$	$P_{47}=,4652E-01$
$P_{13}=0.1209E-08$	$P_{48}=,3024E 00$
$P_{21}=0.5126E-08$	
$P_{22}=0.3527E-08$	
$P_{23}=0.3326E-07$	
$P_{31}=0.1731E-04$	
$P_{32}=0.3226E-04$	
$P_{33}=0.2908E-05$	

Figura 5

En la tabla que recoge la figura se han representado, por simplicidad, probabilidades asociadas a un cierto número de estados, tratando de poner en evidencia la existencia de valores muy diferenciados, con ordenes de magnitud que varían entre las 3 ó 4 décimas, para los estados más probables y magnitudes próximas a las billonésimas. Esta situación es típica de los modelos eléctricos en los que estados con un número elevado de fallos son muy poco probables y pueden fácilmente ser eliminados sin que se altere en lo fundamental el cálculo.

Para el ejemplo reducido, con 25 estados, los resultados se recogen en la figura 6, con el mismo criterio de representación.

3. Otros resultados

Una vez obtenidos los valores de las probabilidades de estados, se trata ahora de identificar en cuales se produce pérdida de carga. Para ello hay que considerar que no siempre se produce la avería de los elementos de una red, se produce incapacidad para atender a la demanda, puesto que puede ocurrir que la red en servicio sea capaz de atender dicha demanda. Habrá que señalar de los estados posibles cuales son los que se traducen en pérdida de carga.

Resultados simulación 2

Probabilidades de Estado	
P ₁ = 0.1002E-08	
P ₂ = 0.6604E-06	
P ₃ = 0.4330E-06	
P ₄ = 0.1676E-05	
P ₅ = 0.1675E-05	
P ₆ = 0.1089E-04	
P ₁₁ = 0.9449E-02	
P ₁₂ = 0.1761E-01	
P ₁₃ = 0.1056E-01	
P ₁₄ = 0.9524E-03	
P ₁₅ = 0.9524E-03	
P ₁₆ = 0.6190E-02	
	P ₂₃ = 2905E 00
	P ₂₄ = 1743E 00
	P ₂₅ = 3249E 0

Figura 6

Si, paralelamente a la indicación de los estados de fallo, se señala la cuantía de la carga dejada de suministrar en cada estado de fallo, se puede obtener simultáneamente la esperanza matemática de potencia no suministrada (EPNS) del sistema o pérdida de carga esperada pues, en definitiva, se tendrá

$$EPNS = \sum p_i \cdot PNS_i$$

Donde p_i es la probabilidad de un estado i en el que se deja de suministrar la potencia PNS_i . El sumatorio se extiende a todos los estados de fallo.

Por otro lado, es fácilmente demostrable que la frecuencia de un estado es

$$f_i = p_i \sum_i$$

donde p_i es la probabilidad de estado y \sum_i es la suma de las intensidades de salida de dicho estado. Considerando el conjunto de estados de fallo como un estado único, es decir,

reduciendo la cadena a sólo dos estados posibles: de fallo y de no fallo, es posible calcular la frecuencia del estado de fallo.

Por último, el tiempo de residencia en el estado i será

$$T_i = P_i / f_i$$

Capacidades de los estados

Estado	Capacidad (MW)	Estado	Capacidad (MW)	Estado	Capacidad (MW)
0	100	16	0	32	0
1	50	17	0	33	0
2	0	18	40	34	0
3	70	19	70	35	0
4	30	20	0	36	0
5	70	21	30	37	0
6	70	22	40	38	0
7	80	23	70	39	40
8	50	24	50	40	0
9	0	25	40	41	40
10	50	26	50	42	40
11	50	27	0	43	0
12	50	28	30	44	40
13	0	29	40	45	0
14	0	30	50	46	0
15	0	31	50	47	0

Figura 7

por lo que determinar la duración media del fallo es inmediata, a partir de los datos obtenidos hasta ahora.

El conjunto de estos cálculos queda, asimismo, realizados por el programa de ordenador a que se ha hecho mención.

Así, si se asignan a los 48 estados del diagrama completo las capacidades recogidas en la figura 7 y con los valores de tasas de avería y reparación ya indicados en la Figura 4, los resultados obtenidos son los que se incluyen en la tabla 6. En el caso de considerar el diagrama de estados reducido a 25, con capacidades similares a las correspondientes de la tabla nº3, los resultados finales son los que aparecen en la tabla 7.

De la comparación de las tablas 6 y 7, se deduce una conclusión importante:

Resultados globales simulación 1

Probabilidad de fallo del sistema	0.100 E-01
Frecuencia media del fallo	0.970 E-06 Fallos/ año
Duración media del fallo	0.102 E-07 años
Perdida de carga esperada	38.45 MW

Figura 8

Los resultados del diagrama reducido son sensiblemente distintos de los obtenidos con el diagrama completo, por lo que la simplificación no siempre es correcta.

Resultados globales simulación 2

Probabilidad de fallo del sistema	0.100 E-01
Frecuencia media del fallo	0.378 E-07 Fallos/ año
Duración media del fallo	0.264 E-10 años
Perdida de carga esperada	63.66 MW

Figura 9

REDUCCIÓN DE LA MATRIZ

A lo largo de todo el proceso anterior se ha comprobado, de un lado, que el tamaño de la matriz, incluso para una red sencilla, es importante, por lo que su procesamiento va a requerir capacidades de memoria importantes y tiempos de procesador elevados, y, de otro, que la ampliación realizada no es adecuada.

Para llegar a un método práctico de cálculo de la fiabilidad de una red hay que buscar otras formas de reducción. El procedimiento utilizado es el de agrupación de estados. En este caso y puesto que el programa de ordenador permite la obtención del valor EPNS, esperanza de potencia no suministrada, la agrupación ha de hacerse con los estados con capacidad homóloga.

La técnica utilizada para la agrupación de estados es la siguiente:

1. Se considera como capacidad del estado de agregación la de cualquiera de los estados que lo componen.
2. Las entradas al estado de agregación están formadas por las entradas a cualquiera de los estados que lo componen.
3. Las salidas del estado de agregación están compuestas por las salidas desde cualquiera de los estados componentes.
4. Se suprimen los enlaces entre estados componentes del mismo estado agregado.