

Heurísticas derivadas de programación matemática para resolver el *Multi-Min-Max Assembly Line Balancing Problem* (MMM-ALBP)*

Rafael Pastor¹, Jordi Ojeda^{1,2}

¹ Dpto. de Organización de Empresas. Research Institute IOC. Universidad Politécnica de Cataluña. ETSEIB, Av. Diagonal, 647, planta 11, 08028 Barcelona. {rafael.pastor/jordi.ojeda}@upc.edu

² Fundación CIM, C/ Llorens i Artigas, 12, Parque Tecnológico de Barcelona, 08028 Barcelona

Resumen

En este trabajo se diseñan y evalúan procedimientos heurísticos para resolver un nuevo problema de equilibrado de líneas de montaje presentado en Pastor et al. (2006), el Multi-Min-Max Assembly Line Balancing Problem (MMM-ALBP), que consiste en minimizar el tiempo de la estación más cargada, posteriormente el tiempo de la segunda estación más cargada, posteriormente el de la tercera, etc. Los procedimientos heurísticos se derivan de los modelos de programación matemática presentados en Pastor et al. (2006) para resolver el MMM-ALBP; la idea consiste en limitar el tiempo de cálculo del optimizador utilizado, lo que proporciona, según se reparta dicho tiempo entre los modelos de programación matemática a resolver, tres procedimientos heurísticos diferentes. Para resolver los modelos de programación matemática resultantes se utiliza el optimizador comercial CPLEX. La eficiencia de las heurísticas diseñadas es evaluada resolviendo ejemplares de prueba de la base de ejemplares accesible en www.assembly-line-balancing.de para el equilibrado de líneas de montaje.

Palabras clave: equilibrado de líneas de montaje

1. Introducción

Existen muchos problemas para los que se puede plantear un objetivo *Mínmax*, consistente en minimizar el máximo valor alcanzable: localización; discrepancia respecto a un valor ideal; carga de estaciones en líneas de montaje; etc.

La resolución óptima de problemas con este tipo de objetivo consigue que el valor máximo sea lo menor posible, pero no se considera qué pasa con los demás valores, y éstos también pueden tener gran importancia (ya que, sin superar el valor máximo, su distribución puede ser muy irregular y, de esta forma, inadecuada).

El problema de equilibrado de líneas es un problema muy estudiado en la literatura y entre los últimos trabajos de síntesis cabe destacar los de Rekiek et al. 2002, Becker and Scholl 2006 y Scholl and Becker 2006.

En el problema de equilibrado de líneas de montaje el considerar el segundo valor máximo, el tercero, el cuarto, etc., tiene gran importancia ya que permite ganar en fiabilidad de la línea. No es lo mismo una distribución de la carga de trabajo entre 6 estaciones de, por ejemplo, 10, 10, 10, 4, 3, 3, que una distribución de 10, 6, 6, 6, 6, 6; el valor del tiempo ciclo es el mismo

* Financiado por el proyecto del MCYT DPI2004-03472, cofinanciado por FEDER.

pero, indudablemente, la segunda distribución es más fiable que la primera. Por otro lado, y como se observa en el ejemplo anterior, el objetivo *multi-min-max* también repercute en conseguir una distribución homogénea de la carga de trabajo entre las diferentes estaciones de la línea.

Existen funciones objetivo que también tienden a homogeneizar la distribución de la carga de trabajo, como podría ser la suma, para todas las estaciones, del cuadrado de la discrepancia entre el tiempo medio de carga de las estaciones y la carga de dicha estación ($[MIN]Z = \sum_{j=1}^m (\bar{t} - t_j)^2$, siendo m el número de estaciones y t_j la carga de la estación j); pero cabe recordar que la función multi-min-max persigue un objetivo distinto.

El novedoso problema de equilibrado de líneas de montaje *Multi-Min-Max Assembly Line Balancing Problem* (MMM-ALBP), que consiste en minimizar el tiempo de la estación más cargada, posteriormente el tiempo de la segunda estación más cargada, posteriormente el de la tercera, etc., es presentado en Pastor et al. (2006), en donde, además, se proponen dos programas matemáticos para su resolución óptima.

La eficiencia de los dos modelos exactos es evaluada en Pastor et al. (2006), resolviendo ejemplares de prueba de la base de ejemplares accesible en www.assembly-line-balancing.de para el equilibrado de líneas de montaje; concretamente se utilizan 16 problemas que dan lugar a un conjunto de 274 ejemplares. Para la resolución exacta de los modelos se utiliza el CPLEX del OPL-Studio de ILOG con un tiempo máximo de cálculo de 18.000 segundos. Mientras un modelo, denominado jerarquizado global, resuelve de forma exacta un total de 42 ejemplares, el otro, denominado jerarquizado sucesivo, encuentra la solución óptima de 63 ejemplares.

De esta forma parece clara la necesidad de desarrollar procedimientos heurísticos para resolver el problema planteado.

2. Heurísticas derivadas de la programación matemática para el MMM-ALBP

A continuación se proponen procedimientos heurísticos derivados de los dos modelos de programación matemática presentados en Pastor et al. (2006): el modelo jerarquizado global y el modelo jerarquizado sucesivo. La idea consiste en limitar el tiempo de cálculo del optimizador utilizado, lo que deriva, según se reparta dicho tiempo de cálculo entre los modelos de programación matemática a resolver, en tres procedimientos heurísticos diferentes.

2.1. Heurística derivada del Modelo Jerarquizado Global (H_MJG)

La heurística derivada del Modelo Jerarquizado Global consiste en ejecutar dicho modelo durante 18000 segundos y conservar la mejor solución obtenida.

2.2. Heurísticas derivadas del Modelo Jerarquizado Sucesivo (H1_MJS y H2_MJS)

Las heurísticas derivadas del Modelo Jerarquizado Sucesivo (H1_MJS y H2_MJS) consisten en ejecutar dicho modelo durante 18000 segundos y conservar la mejor solución. De todas formas, en este caso se ha de concretar cómo se distribuye dicho tiempo, ya que se trata de una programación multinivel en la que hay que resolver sucesivamente tantos programas

matemáticos como el número de estaciones: minimizar el tiempo de la estación más cargada, T_1 ; a continuación, y respetando T_1 , minimizar el tiempo de la segunda estación más cargada, T_2 ; y así sucesivamente.

Se han diseñado dos formas de repartir los 18000 segundos entre los diferentes submodelos a resolver, lo que proporciona las heurísticas H1_MJS y H2_MJS.

H1_MJS consiste en asignar al submodelo que va a ser resuelto la totalidad del tiempo disponible, una vez resueltos de forma óptima los anteriores. Se ejecuta el primer submodelo (con un tiempo máximo de 18000 segundos); si queda tiempo disponible, se ejecuta el segundo submodelo (con un tiempo máximo igual al tiempo restante hasta los 18000 segundos); y así sucesivamente.

H2_MJS consiste en asignar al submodelo que va a ser resuelto la mitad del tiempo disponible. Se ejecuta el primer submodelo con un máximo de 9000 segundos; a continuación se ejecuta el segundo submodelo con la mitad del tiempo disponible, que puede ser mayor que 4500 segundos si el primer submodelo garantiza la solución óptima antes de los 9000 segundos permitidos; y así sucesivamente. Al último submodelo a resolver se le asigna todo el tiempo restante hasta completar los 18000 segundos.

Como se puede comprobar, al ejecutar la heurística H2_MJS es posible finalizar la ejecución de los submodelos sin garantizar su solución óptima. De esta forma, cuando se resuelve el submodelo q es posible encontrar un valor de T_j ($j < q$) menor que el obtenido al resolver el submodelo j (si dicho submodelo no garantizó la optimalidad de la solución). Se ha considerado dicha posibilidad y se han ido actualizando los valores de T_j cuando éstos han mejorado.

2.3. Experiencia computacional

La eficiencia de los procedimientos heurísticos ha sido evaluada con 15 problemas, que dan lugar a 249 ejemplares, obtenidos de la base de ejemplares accesible en www.assembly-line-balancing.de para el equilibrado de líneas de montaje. Concretamente, de los 17 problemas SALBP-2 accesibles se han utilizado todos menos el “Barthold2” y el “Scholl”, ya que sus grandes dimensiones agotan la memoria y capacidad de cálculo del optimizador. Los ejemplares utilizados presentan una gran variedad del número de estaciones (desde 3 hasta 30), del número de tareas (desde 29 hasta 148), del número de precedencias (desde 32 hasta 181) y de la media de la duración de las tareas (desde 5.45 hasta 1354.95 unidades de tiempo).

Los programas lineales mixtos generados han sido resueltos utilizando el software de optimización ILOG CPLEX 9.0 en un PC Pentium IV a 3.00 GHz con 512 Mb de RAM, y utilizando las opciones que el optimizador presenta por defecto.

El valor de los parámetros α_k ($k=1, \dots, m$), utilizados para ponderar los elementos de la función objetivo en el modelo jerarquizado global, han sido definidos como sigue: $\alpha_k = 10^{m-k}$ ($k=1, \dots, m$).

La Tabla 1 muestra, para cada una de las heurísticas (H_MJG, H1_MJS y H2_MJS), el número de ejemplares para los que se obtiene solución ($N^{\circ} Sol$), ya sea factible u óptima.

Tabla 1. Número de ejemplares con solución

Heurística	H_MJG	H1_MJS	H2_MJS
$N^{\circ} Sol$	121	249	249

Mientras que con las heurísticas derivadas del Modelo Jerarquizado Sucesivo se resuelven los 249 ejemplares, con la heurística H_MJG únicamente se resuelven 121 ejemplares (en su mayoría caracterizados por tener más de 20 estaciones de trabajo). El alto valor de los parámetros α_k , cuando el número de estaciones es elevado, puede explicar la dificultad del optimizador para encontrar una primera solución factible con el procedimiento H_MJG.

Se ha realizado un análisis de los resultados de los 121 ejemplares que son resueltos por las tres heurísticas. En la Tabla 2 se muestra el porcentaje de ejemplares según la heurística que proporciona la mejor solución.

Tabla 2. Porcentaje de ejemplares según la mejor solución

Heurística que proporciona la mejor solución	% ejemplares
H_MJG, H1_MJS y H2_MJS	43,90
H1_MJS y H2_MJS	37,80
H1_MJS	2,44
H2_MJS	7,32
H_MJG	8,54

Se observa que las heurísticas H1_MJS y H2_MJS obtienen mejores soluciones que la heurística H_MJG. Este resultado es debido a que la heurística H_MJG optimiza el valor de las cargas de trabajo de todas las estaciones de forma simultánea, mientras que las heurísticas H1_MJS y H2_MJS se centran, consecutiva e independientemente, y con mayor prioridad, en minimizar el valor asignado a las estaciones más cargadas.

Analizando la Tabla 2 se puede concluir la igualdad que existe entre las heurísticas H1_MJS y H2_MJS, aunque es posible observar que, en cuanto al número de ejemplares para los que se obtiene la mejor solución, la heurística H2_MJS es ligeramente mejor que la H1_MJS. Para los ejemplares en los que las tres heurísticas obtienen la mejor solución, los tiempos de cálculo también son menores en las heurísticas H1_MJS y H2_MJS, que en la heurística H_MJG; aunque en ejecuciones con duraciones muy cortas a veces es más rápida la heurística H_MJG, cuando los tiempos de resolución aumentan las heurísticas H1_MJS y H2_MJS son más rápidas.

Para comparar cuantitativamente las soluciones de un ejemplar del MMM-ALBP se ha diseñado un parámetro, denominado δ , que considera la diferencia de carga, entre ambas soluciones, de las estaciones según la lista ordenada de mayor a menor carga de trabajo:

$$\delta = \frac{\Delta_1 \cdot 100^m + \Delta_2 \cdot 100^{m-1} + \dots + \Delta_m \cdot 100}{CT_{best} \cdot 100^{m-1}} \quad (1)$$

donde Δ_j es la diferencia positiva, nula o negativa, de carga en la j -ésima estación más cargada, entre la peor y la mejor solución que se compara (es decir, es la cantidad de tiempo que la mejor de las dos soluciones mejora, o empeora, respecto la otra); m es el número de estaciones de trabajo; y CT_{best} es el tiempo de ciclo de la mejor solución.

Por ejemplo, sea un ejemplar con 4 estaciones y las soluciones Sol_1 y Sol_2 , con unas cargas de las estaciones, en orden no creciente, iguales a, respectivamente, 50-48-46-44 y 50-47-46-45 unidades de tiempo. Sol_2 es mejor que Sol_1 ya que, a igualdad de tiempo de ciclo, tiene una menor carga de la segunda estación más cargada. El valor δ asociado a Sol_1 , con unos valores Δ_j iguales a 0, 1, 0 y -1, se obtiene como sigue:

$$\delta = \frac{0 \cdot 100^4 + 1 \cdot 100^3 + 0 \cdot 100^2 + (-1) \cdot 100}{50 \cdot 100^3} = 0.02.$$
 El parámetro δ permite comparar soluciones entre ellas, o con la solución óptima, y presenta un mayor valor contra peor es la solución comparada respecto a la de referencia.

Una vez definido el parámetro δ es posible comparar cuantitativamente las soluciones obtenidas con los tres procedimientos heurísticos. La tabla 3 muestra el valor promedio del parámetro δ para las heurísticas ensayadas.

Tabla 3. Valor promedio del parámetro δ

Heurística	Valor de δ
H_MJG	0,29
H1_MJS	0,02
H2_MJS	0,03

Se observa la superioridad de las heurísticas H1_MJS y H2_MJS frente a la heurística H_MJG, así como que H1_MJS y H2_MJS presentan un comportamiento muy semejante.

Como se dispone de la mayoría de tiempos de ciclo óptimos de los ejemplares utilizados, se ha realizado un último análisis computacional. Éste consiste en comparar el tiempo de ciclo obtenido por lo procedimientos heurísticos con el mejor tiempo de ciclo conocido y accesible en www.assembly-line-balancing.de. La Tabla 4 muestra la desviación porcentual promedio respecto al mejor valor conocido del tiempo de ciclo.

Tabla 4. Porcentaje de desviación respecto al tiempo de ciclo óptimo

Heurística	% desviación
H_MJG	0,52
H1_MJS	0,26
H2_MJS	0,26

Se observa que las desviaciones promedio son muy pequeñas: ningún valor supera el 1% y el más alto es de tan sólo el 0,52%. Si se comparan los procedimientos heurísticos, nuevamente las heurísticas H1_MJS y H2_MJS son mejores que la heurística H_MJG, aunque iguales entre ellas.

3. Conclusiones

Se proponen procedimientos heurísticos para resolver un nuevo problema de equilibrado de líneas de montaje presentado en Pastor et al. (2006), el Multi-Min-Max Assembly Line Balancing Problem (MMM-ALBP), que consiste en minimizar el tiempo de la estación más cargada, posteriormente el tiempo de la segunda estación más cargada, posteriormente el de la tercera, etc.

Los procedimientos heurísticos derivan de los modelos de programación matemática presentados en Pastor et al. (2006); la idea consiste en limitar el tiempo de cálculo del optimizador utilizado, lo que proporciona, según se reparta dicho tiempo de cálculo entre los modelos de programación matemática a resolver, en tres procedimientos heurísticos diferentes. Para resolver los modelos de programación matemática resultantes se utiliza el optimizador comercial *CPLEX*. La eficiencia de las heurísticas diseñadas es evaluada resolviendo ejemplares de prueba de la base de ejemplares accesible en www.assembly-line-balancing.de para el equilibrado de líneas de montaje.

El trabajo de investigación futura se debe centrar en diseñar y analizar nuevos procedimientos de resolución heurísticos y metaheurísticos.

Referencias

- Becker C; Scholl A. (2006). A survey on problems and methods in generalized assembly line balancing. *European Journal of Operational Research* 168, 694-715.
- Pastor R; Ojeda J; Sentinilla C; Solsona J. (2006). Resolución óptima del *Multi-Min-Max Assembly Line Balancing Problem* (MMM-ALBP) mediante programación matemática. XXIX Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa (SEIO 2006), Tenerife.
- Rekiek B; Dolgui A; Delchambre A; Bratcu A. (2002). State of art of optimization methods for assembly line design. *Annual Reviews in Control* 26, 163-174.
- Scholl A; Becker C. (2006). State-of-the-art exact and heuristic solution procedures for simple assembly line balancing. *European Journal of Operational Research* 168, 666-693.