

## Formalización matemática del problema de equilibrado de líneas con procesos de montaje mutuamente excluyentes\*

Liliana Capacho Betancourt<sup>1</sup>, Rafael Pastor Moreno

<sup>1</sup> Dpto. de Investigación de Operaciones, EISULA y CESIMO – Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela. liliana.capacho@upc.edu

<sup>1,2</sup> Instituto de Organización y Control de Sistemas Industriales, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España. <sup>2</sup> rafael.pastor@upc.edu

### Resumen

*En este trabajo se presenta un problema general de equilibrado de líneas en el que se contemplan procesos de montaje que son mutuamente excluyentes. Cada proceso de montaje (subgrafo) puede implicar grupos de tareas diferentes, de manera que las tareas de montaje se ejecutan si el proceso al cual pertenecen es seleccionado. Además, se considera que los tiempos de proceso de las tareas son dependientes del proceso de montaje. Dicho problema se formaliza a través de un modelo de programación matemática en el cual los subgrafos alternativos contemplan sólo aquellas tareas que disponen de variantes de montaje y cada uno de ellos define a una ruta parcial. Se presentan un experimento computacional diseñado para evaluar el desempeño del modelo propuesto. Los resultados del experimento muestran que con este nuevo modelo se reducen significativamente el número de variables y de restricciones comparando con el modelo preliminar desarrollado para resolver el ASALBP, por tanto, se pueden resolver problemas de tamaño pequeño y medio en tiempos de cómputo razonables.*

**Palabras clave:** Equilibrado de líneas, programación matemática

### 1. Introducción

Existen numerosos procedimientos desarrollados para resolver el problema de equilibrado de líneas de montaje, especialmente el caso simple (SALBP) en el que se consideran supuestos bastantes restrictivos (véase, por ejemplo, Baybars (1986), Scholl y Becker (2006)). En dichos problemas se asume que se dispone de un diagrama de precedencias único y predeterminado que representa las relaciones entre las tareas de montaje. Relativamente pocos problemas tratan configuraciones alternativas, siendo en su mayoría problemas de diseño de líneas asociados a la selección de equipos alternativos (ejemplos de estos problemas se pueden encontrar en Pinto et al. (1983), Bukchin y Rubinovitz (2003) y Scholl y Becker (2006)).

Usualmente, cuando se consideran alternativas se selecciona una de ellas a priori y después se equilibra la línea de montaje. De esta manera no se puede garantizar que el problema global se pueda resolver de manera óptima, porque no se toman en cuenta las posibles repercusiones que puede tener los procesos de montaje disponibles en el equilibrado de la línea. Capacho y Pastor (2006) tratan un problema en el que se consideran alternativas de montaje y definen

---

\* Este trabajo se deriva de la participación de sus autores en un proyecto de investigación financiado por MCYT con referencia DPI2004-03472, cofinanciado por FEDER.

una versión extendida del problema general de equilibrado de líneas denominado ASALBP, *Alternative Subgraphs Assembly Line Balancing Problem*. En dicho problema las alternativas de montaje (subgrafos) pueden implicar tanto a los mismos grupos de tareas de montaje como procesos independientes mutuamente excluyentes que implican grupos de tareas diferentes. En este último caso, las tareas serán ejecutadas si el proceso de montaje al que pertenecen es seleccionado, relajando de esta manera la condición SALBP que establece que todas las tareas deben ejecutarse una sola vez.

En el ejemplo de la Figura 1 se muestra el S-grafo de un problema que consta de 50 tareas y de 7 variantes alternativas de montaje. El S-grafo es una herramienta de diagramación propuesta por Capacho y Pastor (2005) para representar en un único diagrama todas las alternativas de montaje permitidas, agrupando en subgrafos las tareas afectadas por un mismo proceso de montaje. En el ejemplo de la Figura 1 se muestran, delimitados por rectángulos discontinuos, las 3 partes del sistema (sub-ensamblados) que permiten alternativas: en el primero se tienen dos variantes S1 y S2 para las tareas 1, 3, 5 y 9; en el segundo se tienen 3 procesos de montaje mutuamente excluyentes que implican grupos de tareas diferentes: S1 para las tareas 20, 21 y 22; S2 para 46, 47 y 48; y S3 para 49 y 50. El tercer sub-ensamblado dispone de dos alternativas de montaje: S6 y S7 para las tareas 42, 44 y 45. De esta forma, para resolver este problema se debe seleccionar un subgrafo para cada uno de los 3 sub-ensamblados disponibles y realizar la asignación de las tareas de montaje correspondientes.

En resto de este trabajo esta estructurado de la siguiente manera: en la sección 2 se presenta un modelo de programación matemática mejorado del problema ASALBP. En la sección 3 se presenta un experimento computacional y el análisis de los resultados. Finalmente, en la sección 4 se presentan las conclusiones y se propone trabajos de investigación futuros.

## 2. Formalización matemática del problema de equilibrado de líneas con procesos de montaje mutuamente excluyentes

Como se mencionó previamente, el problema ASALB extendido considera procesos de

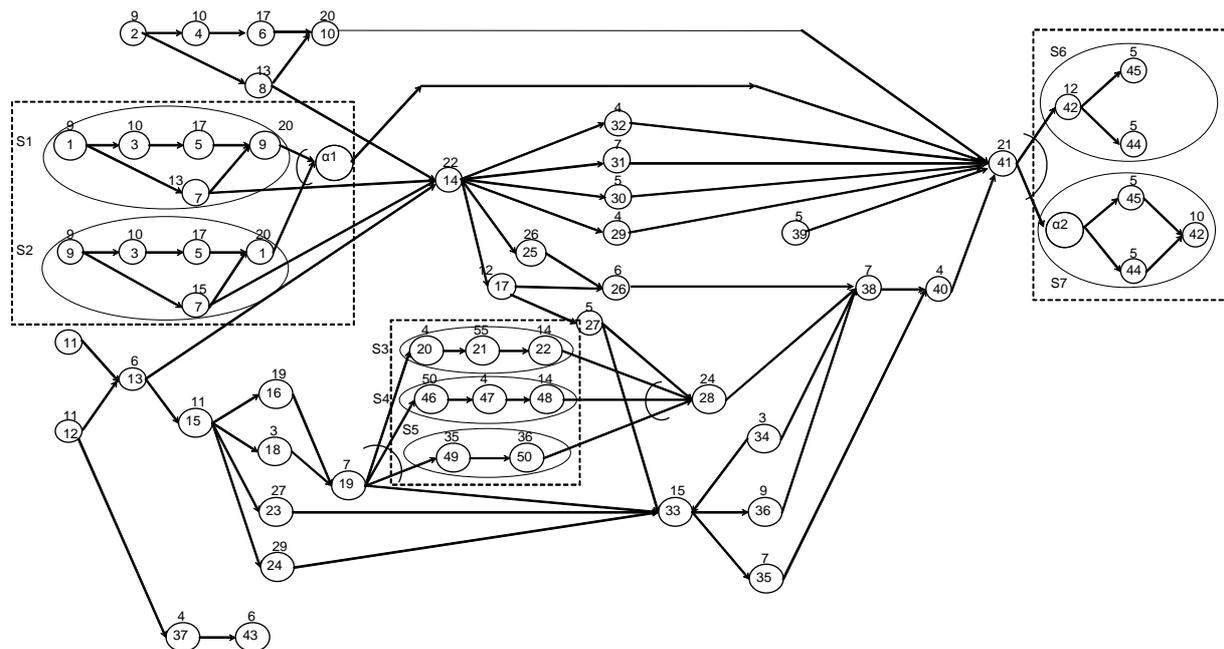


Figura 1. S-grafo para un problema de equilibrado de líneas con 50 tareas.

montaje que son mutuamente excluyentes. Este problema se formaliza en este trabajo a través de un modelo de programación matemática denominado modelo mejorado, *MM*. En dicho modelo los subgrafos de montaje contemplan sólo aquellas tareas que disponen de alternativas de montaje y cada uno define a una ruta parcial. En un modelo preliminar, *MP*, desarrollado para resolver el problema ASALB cada alternativa esta determinada por un diagrama de precedencias completo y es denominada ruta global. De esa forma, se dispone de tantas rutas globales como combinaciones posibles de las alternativas de montaje de cada sub-ensamblado disponible en el S-grafo. Cuando se consideran rutas globales, se involucran todas las tareas requeridas para realizar el montaje incluyendo aquellas que no permiten alternativas. Esto implica que se debe definir un gran número de variables de asignación aun para un número pequeño de alternativas de montaje (véase para mas detalle a Capacho y Pastor (2005)).

En el modelo mejorado las variables de asignación son definidas por ruta parcial o proceso alternativo por lo que el tamaño del modelo a ser resuelto se reduce considerablemente. Adicionalmente, se considera que las tareas que no permiten alternativas se procesan a través de una única ruta denominada ruta 0.

En la siguiente notación los términos subgrafos y rutas son usados indistintamente.

## 2.1. Parámetros

$n$	Número de tareas ( $i = 1, \dots, n$ ).
$nr$	Número de rutas (subgrafos) alternativas ( $r = 0, \dots, nr$ ).
$nsr$	Número de conjuntos diferentes de rutas alternativas entre sí ( $q=1, \dots, nsr$ ). En el ejemplo de la Figura 1 hay 3 de estos subconjuntos ( $nsr=3$ ).
$m_{min}$ ,	Cota inferior del número de estaciones.
$m_{max}$	Cota superior del número de estaciones.
$R_i$	Conjunto de rutas a través de las cuales se puede procesar la tarea $i$ ( $i = 1, \dots, n$ ).
$ct$	cota superior del tiempo ciclo.
$t_{ir}$	duración de la tarea $i$ si se procesa a través de la ruta $r$ ( $i = 1, \dots, n; r \in R_i$ ).
$TR_r$	Conjunto de tareas afectadas por la ruta $r$ .
$P_{ir}$	Conjunto de todos los posibles predecesores inmediatos de la tarea $i$ , si $i$ se procesa a través de la ruta $r$ ( $i=1, \dots, n; r \in R_i$ ).
$PT_i$	Conjunto de todos los posibles predecesores inmediatos de la tarea $i$ ( $PT_i = \bigcup_{r \in R_i} P_{ir}$ ).
$E_{ir}, L_{ir}$	primera y última estación a la que se puede asignar la tarea $i$ si ésta se procesa a través de la ruta $r$ ( $i=1, \dots, n; r \in R_i$ ).
$SCR_q$	Subconjunto $q$ de rutas que son alternativas entre sí ( $q=1, \dots, nsr$ ). En el ejemplo de la Figura 1 se tienen los siguientes subconjuntos: $SCR_1$ que contiene a las rutas R1 y R2; $SCR_2$ que contiene a R3, R4 y R5; y $SCR_3$ con las rutas R6 y R7.

## 2.2. Variables de decisión

$x_{ijr} \in \{0,1\}$	=1 si la tarea $i$ se asigna a la estación $j$ y procesada a través de la ruta $r$ ( $i = 1, \dots, n; \forall r \in R_i; \forall j \in [E_{ir}, L_{ir}]$ ).
$y_j \in \{0,1\}$	=1 si alguna tarea es asignada a la estación $j$ ( $j = m_{min} + 1, \dots, m_{max}$ ).
$ar_r \in \{0,1\}$	= 1 si alguna tarea es procesada a través de la ruta $r$ ( $r = 1, \dots, nr$ ).

### 2.3. Modelo Mejorado del problema ASALBP-1: busca minimizar el número de estaciones de trabajo dado $ct$

$$\text{Min } Z = \sum_{j=m_{\min}+1}^{m_{\max}} j \cdot y_j \quad (1)$$

$$\sum_{j=E_{i0}}^{L_{i0}} x_{ij0} = 1; \forall i \mid i \in TR_0 \quad (2)$$

$$\sum_{r \in R_i} \sum_{j=E_{ir}}^{L_{ir}} x_{ijr} = \sum_{r \in R_i} ar_r, \forall i \mid i \notin TR_0 \quad (3)$$

$$\sum_{r=0}^{nr} \sum_{\forall i \mid (r \in R_i) \wedge (j \in [E_{ir}, L_{ir}])} t_{ir} \cdot x_{ijr} \leq ct \quad j = 1, \dots, m_{\min} \quad (4)$$

$$\sum_{r=0}^{nr} \sum_{\forall i \mid (r \in R_i) \wedge (j \in [E_{ir}, L_{ir}])} t_{ir} \cdot x_{ijr} \leq ct \cdot y_j \quad j = m_{\min} + 1, \dots, m_{\max} \quad (5)$$

$$\sum_{j=E_{p0}}^{L_{p0}} j \cdot x_{pj0} \leq \sum_{j=E_{i0}}^{L_{i0}} j \cdot x_{ij0} \quad \forall i \in TR_0, \forall p \in PT_i \mid p \in TR_0 \quad (6)$$

$$\sum_{s \in R_p} \sum_{j=E_{ps}}^{L_{ps}} j \cdot x_{pjs} \leq \sum_{j=E_{i0}}^{L_{i0}} j \cdot x_{ij0} \quad \forall i \in TR_0, \forall p \in PT_i \mid p \notin TR_0 \quad (7)$$

$$\sum_{j=E_{p0}}^{L_{p0}} j \cdot x_{pj0} \leq \sum_{r \in R_i} \sum_{j=E_{ir}}^{L_{ir}} j \cdot x_{ijr} + m_{\max} \cdot (1 - \sum_{r \in R_i} ar_r) \quad \forall i \notin TR_0, \forall p \in PT_i \mid p \in TR_0 \quad (8)$$

$$\sum_{j=E_{pr}}^{L_{pr}} j \cdot x_{pjr} \leq \sum_{j=E_{ir}}^{L_{ir}} j \cdot x_{ijr} \quad \forall i \notin TR_0, \forall r \in R_i, \forall p \in P_{ir} \mid [p \notin TR_0 \wedge r \in R_p] \quad (9)$$

$$\sum_{s \in R_p} \sum_{j=E_{ps}}^{L_{ps}} j \cdot x_{pjs} \leq \sum_{r \in R_i} \sum_{j=E_{ir}}^{L_{ir}} j \cdot x_{ijr} \quad \forall i \notin TR_0, \forall p \in PT_i \mid [p \notin TR_0 \wedge (R_i \cap R_p = \emptyset)] \quad (10)$$

$$\sum_{r \in SCR_q} ar_r = 1 \quad q = 1, \dots, nsr \quad (11)$$

$$\sum_{i \in TR_r} \sum_{j=E_{ir}}^{L_{ir}} x_{ijr} \leq ar_r \cdot |TR_r| \quad r = 1, \dots, nr \quad (12)$$

La función objetivo (1) minimiza el número de estaciones de trabajo dada una cota superior del tiempo ciclo. Las restricciones (2) y (3) garantizan, por una parte, que todas las tareas que pertenecen a una ruta seleccionada sean asignadas a una y sólo una estación de trabajo; y por la otra, que las tareas que no pertenecen a las rutas seleccionadas no sean asignadas. Las restricciones (4) y (5) aseguran que el tiempo total de proceso asignado a una estación  $j$  no exceda el tiempo ciclo. Las ecuaciones (6) a la (10) son las restricciones de precedencia, que garantizan que ninguna tarea es asignada antes que sus tareas predecesoras; (11) es la restricción de unicidad de ruta que asegura que una y sólo una ruta es seleccionada entre las alternativas de cada sub-ensamblado disponible; y la restricción (12) garantiza que las tareas que pertenecen a una ruta particular (subgrafo de precedencias) son asignadas a la misma ruta.

La formulación matemática para ASALBP-2 se puede obtener fácilmente modificando el modelo desarrollado para resolver ASALBP-1 en el cual la función objetivo busca minimizar el tiempo ciclo necesario para procesar las tareas de montaje y en donde el número de estaciones es un parámetro conocido. De esta manera, todas las variables  $y_j$  de existencia de las estaciones son iguales a 1 y no son necesarias en la formulación de las restricciones el modelo ASALBP-2.

### 3. Experimento Computacional

Para analizar el desempeño del modelo mejorado (MP) y para compararlo con el modelo preliminar (MP) se desarrollo un experimento computacional utilizando ILOG CPLEX 8.1, en una PC Pentium 4, CPU 2.80 GHz with 512 Mb of RAM.

Se resolvieron instancias de siguientes problemas: *Bowman*, *Mansor*, *Buxey*, *Gunther*, *Kilbrid*, *Hann*, *Warnecke*, *Tonge* y *Arcus* con 8, 11, 29, 35, 53, 58, 70 y 111 tareas, respectivamente; cuyos datos se encuentran disponibles en la pagina de Internet para la investigación de problemas de equilibrado de líneas: [www.assembly-line-balancing.de](http://www.assembly-line-balancing.de). Estos 9 problemas fueron adaptados para contemplar tanto rutas globales como parciales (entre 2 y 14 rutas) y se consideró para cada uno de ellos entre 3 y 4 valores diferentes de tiempo ciclo. Por otra parte, se agregaron tareas adicionales a aquellos problemas que contemplasen procesos alternativos con tareas diferentes. Por ejemplo, al problema de *Hann* se agregaron 9 nuevas tareas para contemplar 4 procesos de ensamblado alternativos, cada uno con 2, 3, 2 y 2 tareas, respectivamente. De esta forma, se definieron un total de 82 problemas de prueba que fueron resueltos tanto con el modelo preliminar como con el modelo mejorado.

En la Tabla 1 se presentan datos y resultados de algunos de los problemas considerados en el experimento. Se incluye el nombre del problema; el número de tareas  $n$ ; el tiempo ciclo  $ct$ ; el número de rutas globales y parciales, para los modelos *MP* y *MM*, respectivamente; el número de variables implicado en cada modelo y el tiempo requerido para obtener la solución óptima del problema; y en la última columna de la tabla se muestra el porcentaje de mejora en el desempeño del modelo mejorado con respecto al modelo preliminar.

**Tabla 1.** Datos y solución óptima de instancias de problemas ASALBP

Problema	$n$	$ct$	No. de rutas		Restricciones		Variables		Tiempo de sol.		% de mejora
			global	parcial	MP	MM	MP	MM	MP	MM	
<i>Bowman</i>	8	20	18	9	366	77	1744	888	0.53	0.03	94,3
<i>Mansor</i>	11	62	12	8	288	74	804	547	0.63	0.09	85,7
<i>Mansor</i>	11	62	15	9	352	78	1002	614	2.10	0.16	91,0
<i>Buxey</i>	29	54	12	8	861	147	3850	2581	61547	92.03	99,9
<i>Buxey</i>	29	54	6	6	444	134	1936	1941	18485	0.86	100
<i>Gunther</i>	35	41	32	11	2633	205	25806	8911	89558	14805	83,5
<i>Gunther</i>	40	81	60	13	4287	189	28824	6276	467	0.31	99,9
<i>Kilbrid</i>	45	56	12	8	1383	204	10840	7247	213	1.41	99,3
<i>Kilbrid</i>	45	69	24	10	2505	217	17312	7241	830	1.06	99,9
<i>Hann</i>	53	4676	18	9	2424	238	4780	2403	114	0.13	99,9
<i>Hann</i>	58	2004	24	10	3400	263	19516	8157	8356	3.48	100
<i>Hann</i>	62	2806	36	12	5210	280	22340	7471	19785	249	98,7
<i>Warnecke</i>	58	111	2	3	368	235	3186	4754	7200	638	91,1
<i>Warnecke</i>	58	111	4	5	648	253	6318	7888	17709	1410	92,0
<i>Tonge</i>	70	185	8	7	1428	342	21356	18702	259200	80122	69,1
Porcentaje de mejora del desempeño del modelo mejorado <i>MM</i> sobre el modelo preliminar <i>MP</i>											93,6

Como se puede observar en la Tabla 1, en el modelo mejorado (*MM*) se redujeron significativamente el número de variables y de restricciones; y de manera similar el tiempo de requerido para resolver los problemas de prueba. De esta forma, con el modelo *MM* se pueden obtener y garantizar soluciones óptimas en tiempos de cómputo razonables para problemas de hasta 70 tareas y 14 rutas parciales (40 rutas globales). El modelo *MM* mostró ser más eficiente que el modelo preliminar, *MP*, siendo su desempeño promedio mejor que el de *MP* en un 94%; inclusive fue 100% mejor en casi la mitad de los problemas resueltos. Obsérvese que para los problemas con más de 58 tareas los tiempos de cómputo empiezan a ser considerablemente mayores, en particular con el modelo preliminar. Dichos problemas se resolvieron limitando esta vez el tiempo de cómputo a 1800 segundos y se pudo obtener soluciones factibles con el modelo mejorado *MM* pero no con el modelo preliminar *MP*.

## 6. Conclusions and Further Research

En este trabajo se presentó una versión ampliada del problema ASALBP, en el que se consideran procesos de montaje mutuamente excluyentes que pueden implicar grupos de tareas diferentes. Los procesos alternativos definen tanto a las tareas de montaje como a los tiempos de proceso de las tareas. Esto implica que las tareas de serán ejecutadas si el proceso de montaje al que pertenecen es seleccionado, relajando la condición que establece que en los problemas de equilibrado de líneas las tareas deben ejecutarse sólo una vez.

También se presentó un modelo de programación matemática diseñado con la intención de reducir la dimensión del modelo preliminar desarrollado para resolver el ASALBP. Se desarrollo una breve experiencia computacional y los resultados mostraron que el número de variables y restricciones se reducen significativamente en este nuevo modelo. De manera similar, se mostró que con el modelo mejorado los problemas pueden ser resueltos en tiempos de cómputo significativamente menores comparando con el modelo preliminar. A pesar de que su desempeño fue mejor que el del modelo preliminar, con el modelo mejorado sólo se puede resolver problemas pequeños en tiempos de cómputo razonables. Por tanto, trabajos de investigación futuros implican estudiar métodos aproximados que permitan resolver eficientemente problemas industriales, es decir problemas de mediana y gran escala.

## Referencias

- Baybars, I. (1986). A survey of exact algorithms for the simple assembly line balancing problem. *Management Science*, 32, 909-932.
- Becker, C. and Scholl, A. (2006). A survey on problems and methods in generalized assembly line balancing. *European Journal of Operational Research*, 168, 694-715.
- Bukchin, J. and Rubinovitz, J. (2003). A weighted approach for assembly line design with station paralleling and equipment selection. *IIE Transactions*, 35, 73-85.
- Capacho, L. and Pastor, R. (2006). The ASALB Problem with Processing Alternatives Involving Different Tasks: Definition, Formalization and Resolution. A ser publicado en Springer-Verlag *Lecture Notes in Computer Science*. The 2006 International Conference on Computational Science and its Applications (ICCSA 2006). Glasgow, Scotland May 2006.
- Capacho, L. y Pastor, R. (2005). ASALBP: the Alternative Subgraphs Assembly Line Balancing Problem. *Technical Report IOC-DT-P-2005-5*. UPC. Barcelona, Spain.
- Pinto, P.A., Dannenbring, D.G. and Khumawala, B.M. (1983). Assembly line balancing with processing alternatives: an application. *Management Science*, 29, 817-830.
- Scholl, A. and Becker, C. (2006). State-of-the-art exact and heuristic solution procedures for simple assembly line balancing. *European Journal of Operational Research*, 168, 666-693.