X Congreso de Ingeniería de Organización
Valencia, 7 y 8 de septiembre de 2006

Un modelo de programación lineal paramétrica para la resolución del MRP con restricciones de capacidad *

Josefa Mula Bru[1], Raúl Poler Escoto[2], José Pedro García Sabater[3]

[1,2] Centro de investigación de gestión e ingeniería de la producción, Universidad Politécnica de Valencia, EPSA, Plaza Ferrándiz y Carbonell, 2, 03801 Alcoy (Alicante) fmula@cigip.upv.es, rpoler@cigip.upv.es
[3] Dpto. de Organización de Empresas. Universidad Politécnica de Valencia. Camino de Vera s/n, 46022 Valencia. jpgarcia@doe.upv.es

Resumen

En este artículo se propone un enfoque de programación lineal paramétrica para su aplicación a un problema MRP con restricciones de capacidad e incertidumbre en los datos de costes. El modelo propuesto considera únicamente la posible ambigüedad en los coeficientes de la función objetivo, mientras que todas las restricciones se consideran deterministas. La solución a obtener por este modelo es imprecisa o fuzzy.

Palabras clave: MRP, incertidumbre, programación matemática *fuzzy*, programación lineal paramétrica.

1. Introducción

En este artículo se desarrolla un modelo de programación lineal paramétrica para dar solución a un problema MRP con restricciones de capacidad y falta de conocimiento en los datos de costes.

En este modelo se va a considerar únicamente la posible ambigüedad en los coeficientes de la función objetivo, mientras que todas las restricciones se consideran deterministas. Dentro de la función objetivo, los costes por retraso de la demanda para productos finales implican los costes explícitos por pérdidas de beneficio aunque también incluyen los costes por pérdida de imagen o clientes. Los costes de mantenimiento de inventarios contienen el coste del capital inmovilizado, seguros, variación de precios, etc. Los costes de la capacidad ociosa están afectados por el exceso de suministro de máquinas clave con respecto al volumen de producción actual de cada período. En este modelo, los costes por retraso de la demanda, los costes de inventarios y los costes de la capacidad ociosa se van a representar por distribuciones de posibilidad triangulares. Los parámetros de una distribución de posibilidad triangular vienen dados por los valores optimista, el más posible y el más pesimista.

* Este trabajo ha sido llevado a cabo en el marco de un proyecto financiado por la Universidad Politécnica de Valencia, titulado ‘Desarrollo de modelos de programación matemática *fuzzy* para la planificación de la producción en contexto de incertidumbre. Aplicación a una empresa industrial del sector del automóvil’.

El artículo se ha estructurado de la siguiente forma. En la Sección 2 se formula el problema como un programa lineal *fuzzy*. En la Sección 3 se plantea un modelo de programación lineal paramétrica equivalente al problema formulado en la Sección 2. La Sección 4 finaliza el artículo con las conclusiones extraídas a lo largo de este trabajo.

2. Formulación del problema

Se ha tomado como base el modelo de programación lineal *MRPDet*, originalmente propuesto en Mula *et al*. (2006), *MRPDet* es un modelo para la optimización del problema de planificación a medio plazo en un entorno de fabricación MRP con restricciones de capacidad, multi-producto, multi-nivel y multi-período.

Se considera la siguiente formulación *fuzzy* del modelo *MRPDet*. Las variables de decisión y parámetros del modelo *fuzzy* se definen en la Tabla 1.

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T}\left(cp_i P_{it} + \tilde{ci}_i\, INVT_{it} + \tilde{crd}_i\, Rd_{it}\right) + \sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{T}\left(\tilde{ctoc}_{rt}\, Toc_{rt} + ctex_{rt} Tex_{rt}\right) \qquad (1)$$

Sujeto a

$$INVT_{i,t-1} + P_{i,t-TS_i} + RP_{it} - INVT_{i,t} - Rd_{i,t-1} - \sum_{j=1}^{I} a_{ij}(P_{jt} + RP_{jt}) + Rd_{it} = d_{it} \quad i = 1\ldots I,\ t = 1\ldots T \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{I} AR_{ir}\, P_{it} + Toc_{rt} - Tex_{rt} = CAP_{rt} \qquad r = 1\ldots R,\ t = 1\ldots T \quad (3)$$

$$Rd_{iT} = 0 \qquad i = 1\ldots I \quad (4)$$

$$P_{it},\ INVT_{it},\ Rd_{it},\ Toc_{rt},\ Tex_{rt} \geq 0 \qquad i = 1\ldots I,\ r = 1\ldots R,\ t = 1\ldots T \quad (5)$$

donde $\tilde{ci}_i = (ci_i, hi_i)_T$, $\tilde{crd}_i = (crd_i, hrd_i)_T$ y $\tilde{ctoc}_{rt} = (ctoc_{rt}, htoc_{rt})_T$ son números *fuzzy* triangulares simétricos tal como definido por Maeda (2001).

Un número *fuzzy*, $\tilde{a}$, con la función de pertenencia lineal (Maeda, 2001):

$$\mu_a(x) = \max\left\{L\left(\frac{x-m}{h}\right), 0\right\} \qquad (6)$$

se denomina *L*. Por definición, el número real *m* es igual al centro de $\tilde{a}$ y el número real *h* es el parámetro de desviación de $\tilde{a}$. El número *fuzzy L* se puede representar por $\tilde{a} \equiv (m, h)_L$. Si la forma de la función *L* es dada por $L(x) \equiv 1 - |x|/x_0$, donde $x_0 > 0$ es el punto cero de *L*, el número *fuzzy* $\tilde{a}$ se denomina número *fuzzy* triangular. El número fuzzy triangular $\tilde{a}$ se representa por $\tilde{a} \equiv (m, h)_T$.

En el caso de $\tilde{ci}_i$, ci_i representa el centro del triángulo y hi_i es el parámetro de desviación de $\tilde{ci}_i$.

La función objetivo (1) trata de minimizar los costes de producción, mantenimiento de inventarios, retraso de la demanda, capacidad ociosa y capacidad extraordinaria requerida. Los costes de inventarios, retraso de la demanda y capacidad ociosa se consideran ambiguos.

Las restricciones relativas a las actividades de producción se consideran deterministas.

Las ecuaciones para el balance del inventario vienen dadas por el conjunto de restricciones (2). Estas ecuaciones tienen en cuenta los retrasos de la demanda, que en definitiva se comportan como un inventario negativo. Estas restricciones afirman que para un determinado producto y período, el nivel de inventario al final del período $INVT_{it}$ más el retraso de la demanda (si alguno) Rd_{it} es igual al inventario existente al final del período anterior $INVT_{i,t-1}$, más el volumen de producción finalizado en el período considerado, más las recepciones programadas para ese período RP_{it}, menos la demanda satisfecha en ese período, esto es, la demanda externa d_{it}, la demanda interna o inducida $\sum_{j=1}^{I} a_{ij}(P_{jt} + RP_{jt})$ y la demanda retrasada acumulada de períodos anteriores $Rd_{i,t-1}$. Es importante resaltar que la consideración del parámetro RP_{it} (recepciones programadas del producto i durante el período t) garantiza la continuidad del MRP a lo largo de las sucesivas explosiones realizadas durante un horizonte de planificación dado.

La producción en cada período está limitada por la disponibilidad de un conjunto de recursos compartidos. La ecuación (3) considera los límites de capacidad de estos recursos.

También se ha añadido una restricción (4) que termine con los retrasos en el último período del horizonte de planificación, por lo que en el período T toda la demanda del plan de producción debe quedar satisfecha.

Respecto a las variables de decisión Toc_{rt} y Tex_{rt}, que aparecen en la función objetivo (1) y en la restricción (3), no se limitan con ningún parámetro establecido aunque si se penalizan con los costes correspondientes. El motivo de ello, es proporcionar al modelo la mayor generalidad posible. La limitación de estas variables para aplicaciones específicas del modelo se podría hacer fácilmente teniendo en cuenta que si se exceden esos límites la solución del modelo podría ser infactible.

El modelo también contempla las restricciones de no negatividad (5) para las variables de decisión. Además, faltaría definir, dependiendo del entorno de fabricación donde se aplique el modelo, qué variables se definen como enteras y cuáles como continuas, es decir, que puedan tomar valores fraccionarios.

Sin mucha dificultad podrían añadirse otro tipo de restricciones más específicas de cada entorno de fabricación donde se aplique el modelo, tales como, procesos de producción alternativos para algunos productos, variables de las contrataciones y despidos de mano de obra para la planificación de recursos, límites para las horas extra, quizás una variable para la subcontratación o la posibilidad de permitir diferentes tamaños de lote de producción para un mismo producto, etc.

Tabla 1. Variables de decisión y parámetros del modelo.

Índices			
T	Conjunto de períodos durante el horizonte de planificación (t = 1…T)		
I	Conjunto de productos (i = 1…I)		
J	Conjunto de productos padre en la lista de materiales (j = 1…J)		
R	Conjunto de recursos (r = 1…R)		
Variables de Decisión		*Data*	
P_{it}	Cantidad a producir del producto *i* en el período *t*	d_{it}	Demanda del producto *i* en el período *t*
$INVT_{it}$	Inventario del producto *i* al final del período *t*	α_{ij}	Cantidad requerida de *i* para producir una unidad del producto *j*
Rd_{it}	Demanda retrasada del producto *i* al final del período *t*		
Toc_{rt}	Tiempo ocioso del recurso *r* en el período *t*	TS_i	Tiempo de suministro del producto *i*
Tex_{rt}	Tiempo extra del recurso *r* en el período *t*	$INVT_{i0}$	Inventario del producto *i* en el período 0
		Rd_{i0}	Demanda retrasada del producto *i* en el período 0
Coeficientes de coste en la función objetivo		RP_{it}	Recepciones programadas del producto *i* en el período *t*
cp_i	Coste variable de producción de una unidad del producto *i*		
$(c_i, h_i)_T$	Coste *fuzzy* de inventario de una unidad del producto *i*	*Coeficientes tecnológicos*	
$(crd_i, hrd_i)_T$	Coste *fuzzy* de una unidad de demanda retrasada del producto *i*	AR_{ir}	Tiempo requerido del recurso *r* por unidad de producción del producto *i*
$(ctoc_{rt}, htoc_{rt})_T$	Coste *fuzzy* de una hora ociosa del recurso *r* en el período *t*	CAP_{rt}	Capacidad disponible del recurso *r* en el período *t*
$ctex_{rt}$	Coste de una hora extra del recurso *r* en el período *t*		

3. Planteamiento de un modelo de programación lineal paramétrica equivalente

En este trabajo se aplican las definiciones y conceptos proporcionados por Maeda (1996, 2001), que para resolver un problema de programación lineal *fuzzy* (PLF) con coeficientes de la función objetivo modelados a través de números *fuzzy* tratan de encontrar todas las soluciones de Pareto o las soluciones óptimas débiles de Pareto al problema de optimización bi-criterio asociado con el problema PLF y denominado PLM.

Dado:

$$\text{(PLF)} \quad \begin{cases} \max imizar \ \langle \tilde{c}, x \rangle \equiv \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i x_i \\ Sujeto\, a \qquad Ax \le b, x \ge 0 \end{cases} \tag{7}$$

donde $\tilde{c}_i \equiv (c_i, h_i)_T$, y

$$\text{(PLM)} \quad \begin{cases} \max imizar \ (\langle c, x \rangle + \langle h, x \rangle, \langle c, x \rangle - \langle h, x \rangle)^T, \\ Sujeto\, a \qquad Ax \le b, x \ge 0 \end{cases} \tag{8}$$

donde $c_i \equiv (c_1, c_2,..., c_n)^T$.

Maeda (1996) introduce el concepto de soluciones óptimas del problema PLM:

- x* como una solución óptima de Pareto del problema PLM si no existe un x $\in X$ tal que $(\langle c, x^* \rangle + \langle h, x^* \rangle, \langle c, x^* \rangle - \langle h, x^* \rangle)^T \le (\langle c, x \rangle + \langle h, x \rangle, \langle c, x \rangle - \langle h, x \rangle)^T$.

- x* es una solución óptima débil de Pareto del problema PLM si no existe un x $\in X$ tal que $(\langle c, x^* \rangle + \langle h, x^* \rangle, \langle c, x^* \rangle - \langle h, x^* \rangle)^T < (\langle c, x \rangle + \langle h, x \rangle, \langle c, x \rangle - \langle h, x \rangle)^T$.

Asociado con el problema PLM, Maeda (2001) considera equivalente el siguiente problema de programación lineal PL_λ:

$$(\mathrm{PL}_\lambda)\quad \begin{cases} \max imizar\ \langle c,x\rangle + \lambda(h,x) \\ Sujeto\,a \quad Ax \le b, x \ge 0 \end{cases} \tag{9}$$

donde $\lambda \in R$ es un parámetro dado.

Entonces, Maeda (2001) demuestra que $x^* \in X$ es una solución factible del problema PLF si y sólo si existe un número real $\lambda \in [-1, 1]$ tal que x^* es una solución óptima del problema PL_λ.

Considerando las definiciones y conceptos de Maeda (1996 y 2001) el modelo *fuzzy* a resolver deriva en un modelo de programación lineal paramétrica equivalente que se ha denominado *MRPFuzzy.OF/RD/T/MIN/SF_2:*

MRPFuzzy.OF/RD/T/MIN/SF_2

Minimizar z =

$$-\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T}\left(cp_i P_{it} + (ci_i + \lambda hi_i)INVT_{it} + (crd_i + \lambda hrd_i)Rd_{it}\right) - \sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{T}\left((ctoc_{rt} + \lambda htoc_r)Toc_{rt} + ctex_{rt}Tex_{rt}\right) \tag{10}$$

Sujeto a

$$INVT_{i,t-1} + P_{i,t-TS_i} + RP_{it} - INVT_{i,t} - Rd_{i,t-1} - \sum_{j=1}^{I} a_{ij}(P_{jt} + RP_{jt}) + Rd_{it} = d_{it} \quad i = 1\ldots I,\ t = 1\ldots T \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{I} AR_{ir}\, P_{it} + Toc_{rt} - Tex_{rt} = CAP_{rt} \qquad r = 1\ldots R,\ t = 1\ldots T \tag{12}$$

$$Rd_{iT} = 0 \qquad i = 1\ldots I \tag{13}$$

$$P_{it},\ INVT_{it},\ Rd_{it},\ Toc_{rt},\ Tex_{rt} \ge 0 \qquad i = 1\ldots I,\ r = 1\ldots R,\ t = 1\ldots T \tag{14}$$

El modelo *fuzzy* se ha transformado en un problema de programación lineal parámetrica donde $\lambda \in [-1, 1]$ es un parámetro establecido por el planificador.

El resto de las restricciones del modelo (11, 12, 13, 14) permanecen inalterables respecto al modelo original adoptado como base de este trabajo, *MRPDet.*

La estructura de los datos para el modelo *MRPFuzzy.OF/RD/T/MIN/SF_2* requiere los siguientes datos adicionales respecto al modelo *MRPDet*:

Cada coeficiente ambiguo o *fuzzy* de la función objetivo, coste de mantenimiento de inventarios, coste del retraso de la demanda y coste de la capacidad ociosa, exige la definición del número *fuzzy triangular*:

- Coste de mantenimiento de inventarios: $\tilde{ci}_i = (ci_i, hi_i)_T$,
- Coste del retraso de la demanda: $\tilde{crd}_i = (crd_i, hrd_i)_T$,
- Coste de la capacidad ociosa: $\tilde{ctoc}_r = (ctoc_r, htoc_r)_T$.

Obviamente, el enfoque adoptado en este modelo es aplicable sólo a problemas con números *fuzzy* con funciones de pertenencia triangular. Zhang *et al*. (2003) extienden el trabajo de Maeda (2001) a números *fuzzy* con cualquier tipo de función de pertenencia. Los autores transforman el modelo de PLF en un problema de optimización lineal multi-objetivo con cuatro funciones objetivo.

4. Conclusiones

Este artículo ha presentado un modelo matemático *fuzzy* para la Planificación de la Producción bajo condiciones de incertidumbre en la definición de los costes de la función objetivo. La formulación del modelo de programación lineal *MRPDdet*, adoptado como base de este trabajo, es un modelo tradicional de Planificación de la Producción con coeficientes de coste deterministas. Sin embargo, pueden encontrarse situaciones reales de los entornos de fabricación donde los criterios humanos son inherentes a la evaluación de ciertos valores o condiciones de coste. El modelo *fuzzy* propuesto ha tratado de incorporar la percepción difusa de los costes usando un enfoque de modelado basado en la programación lineal paramétrica.

Referencias

Maeda, T. (1996) Multi-objective decision making and its applications to economic analysis. Makino-syoten.

Maeda, T. (2001) Fuzzy linear programming problems as bi-criteria optimization problems, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 120, 109-121.

Mula, J.; Poler, R.; Garcia, J.P. (2006) MRP with flexible constraints, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 157, Nº 1, 74-97.

Zhang, G.;Wu, Y.;Remias, M.; Lu, J. (2003) Formulation of fuzzy linear programming problems as four-objective constrained optimization problems, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 139, 383-399.