

## Métodos en el dominio de la frecuencia aplicados a mercados eléctricos

Juan R. Trapero Arenas, Diego J. Pedregal Tercero

Dpto. de Administración de Empresas. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Ciudad Real. Universidad de Castilla-La Mancha. Campus de Ciudad Real, 13071 Ciudad Real. [JuanRamon.Trapero@uclm.es](mailto:JuanRamon.Trapero@uclm.es), [Diego.Pedregal@uclm.es](mailto:Diego.Pedregal@uclm.es)

**Palabras clave:** Máxima verosimilitud, dominio de la frecuencia, espacio de los estados, mercados eléctricos, predicción.

### 1. Introducción

La industria de la electricidad ha estado inmersa en un proceso de reestructuración durante los últimos años en muchas partes del mundo. Una de las causas principales de tales cambios es la liberalización del mercado eléctrico. Tanto los productores como consumidores de energía eléctrica han tenido que reajustar sus estrategias para hacer frente a tales cambios. Una parte importante en la estrategia de los agentes que participan en el mercado es la previsión. En este punto las predicciones sobre la demanda y precios de energía eléctrica a corto plazo son claves. De hecho la mala predicción de los precios futuros puede conllevar grandes pérdidas económicas.\*

La literatura dedicada al estudio de series temporales tales como el precio y la demanda de la energía eléctrica es muy amplia. Entre las soluciones más conocidas se encuentran desde los clásicos modelos ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average), por ejemplo Contreras *et al.* (2003) y Conejo *et al.* (2005) hasta el uso de redes neuronales, por ejemplo Kumluca y Erkmen (2003). Sin embargo, algunos autores, como Angelus (2001), opinan que hay una necesidad de metodologías que sean sistemáticas, transparentes y adaptativas. La metodología Box-Jenkins carece de adaptabilidad, mientras que las redes neuronales son modelos caja negra donde su funcionamiento no es del todo transparente.

Los modelos de componentes no observables (*Unobserved Components, UC*) se encuentran bien situados para su aplicación en las series estudiadas en este artículo, ver Trapero (2003, 2005). Otros métodos muy citados son: método Bayesiano en West y Harrison (1989); espacio de los estados en el dominio del tiempo en Harvey (1989), Pedregal y Young (2002); espacio de los estados en el dominio de la frecuencia en Young *et al.* (1999); también métodos basados en reducciones del modelo, Kumluca y Erkmen (2003). Todos estos métodos, aunque parten de una descomposición en componentes teóricos semejantes, tienen puntos de vista completamente diferentes en referencia a su forma de realizar la identificación y estimación.

Las aplicaciones estudiadas en Harvey y Koopman (1993) por un lado y Pedregal y Young (2006) por otro, tienen en común que ambas usan un marco de espacio de los estados para

---

\* Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Consejería de Ciencia y Tecnología de la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha y la unión europea a través del Fondo Social Europeo.

establecer los modelos. Sin embargo, una diferencia muy importante entre ellos, es que, la estimación está hecha en el dominio del tiempo en el primer caso y en el dominio de la frecuencia en el segundo. Esta peculiaridad adquiere gran importancia para nuestro problema porque está demostrado que la estimación por máxima verosimilitud en el dominio del tiempo está muy limitada según el número de parámetros a estimar aumenta. Por el contrario, la estimación en el dominio de la frecuencia no tiene dicha limitación.

En este artículo se propone una herramienta basada en el marco del espacio de los estados utilizando un modelo de componentes no observables donde la estimación de los parámetros se lleva a cabo en el dominio de la frecuencia mediante máxima verosimilitud. Las ventajas del modelo son: alta capacidad de *tracking* de la serie; mayor extracción de información ya que podemos obtener la componente de tendencia, estacional e irregular además de la predicción; un proceso de identificación automático en el dominio de la frecuencia. La potencia de esta aplicación se muestra sobre precios de energía eléctrica en el mercado eléctrico español.

Hay que destacar que el método aquí propuesto, realiza las predicciones automáticamente sin necesidad de diseñar diferentes modelos para cada estación del año como en Conejo *et al.* (2005). Esto facilita enormemente la tarea de predicción, ya que sería posible diseñar una herramienta a medida para cualquier empresa que necesite realizar predicciones. Por tanto, no sería necesario un experto que esté continuamente modelando y realizando predicciones.

A continuación se muestra un breve resumen de cómo se ha organizado el artículo. El segundo apartado proporciona una introducción al modelo utilizado en el Espacio de los Estados. En este apartado se presentarán los modelos de componentes no observables y como particularización el modelo BSM (*Basic Structural Model*, Harvey (1989)). La aplicación a las series temporales de precios de energía del mercado liberalizado eléctrico español se desarrollará en el tercer apartado. Por último se muestran las principales conclusiones.

## 2. Descripción general del modelo.

### 2.1. La estructura de modelos de series temporales

Un modelo estadístico se basa en ciertas hipótesis de carácter probabilístico, que intenta capturar las características esenciales del proceso generador de datos. Dado tal modelo es posible:

- a) Estimar los parámetros por un procedimiento estadístico, como es el método de máxima verosimilitud.
- b) Predecir
- c) Realizar tests estadísticos para comprobar si el modelo puede ser simplificado o si es necesario ampliarlo.

Un posible punto inicial para el desarrollo de modelos de series temporales es un modelo de regresión en que las variables explicativas son función explícitas del tiempo (deterministas). Por ejemplo, un modelo con componentes de tendencia y estacional se puede formular tal que:

$$y_t = \alpha + \beta t + \sum_j \gamma_j z_{jt} + \varepsilon_t \quad (1)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son los coeficientes asociados con la tendencia y  $\gamma_j$ 's son los coeficientes estacionales restringidos a sumar cero. Esta restricción se lleva a cabo estableciendo los  $z_{jt}$ 's como variables *dummy* definidas de forma que para  $j = 1, \dots, s-1$ ,

$$z_{jt} = \begin{cases} 1, & t = j, j+s, j+2s, \dots \\ 0, & t \neq j, j+s, j+2s, \dots \\ -1, & t = s, 2s, 3s, \dots \end{cases} \quad (2)$$

La característica clave de (2) es que la única parte estocástica del modelo es la componente irregular  $\varepsilon_t$ . Esta variable supone ser un término de perturbación aleatoria que se distribuye normalmente con media cero y varianza  $\sigma^2$ , es decir  $\varepsilon_t \approx NID(0, \sigma^2)$ .

El inconveniente de los modelos explicados según (1) es que suelen ser poco apropiados debido al carácter determinístico de los coeficientes de tendencia y estacional. De hecho se les da el mismo peso a todas las observaciones cuando se realizan predicciones. Esto no es muy lógico, ya que las últimas observaciones suelen ser más importantes. La formulación estática de (1) se puede convertir en una dinámica incorporando procesos estocásticos. En el siguiente apartado se introduce el modelo estocástico utilizado en la modelización del mercado eléctrico.

## 2.2. Modelos de componentes no observables

Un modelo estructural básico, cuyas siglas en inglés son (BSM) es una particularización del conjunto de modelos de componentes no observables que adopta la siguiente forma:

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \varepsilon_t \quad (3)$$

donde  $\mu_t$  es la tendencia,  $\gamma_t$  es la componente estacional y  $\varepsilon_t$  es la componente irregular. Con el fin de introducir el carácter estocástico en (3), se utilizará la tendencia lineal local (LLT), siendo ésta una particularización del paseo aleatorio generalizado, tal que:

$$\begin{pmatrix} \mu_t \\ \mu_t^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{t-1} \\ \mu_{t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_t \\ w_t^* \end{pmatrix} \quad (4)$$

donde  $\mu_t$  y  $\mu_t^*$  son parámetros variantes en el tiempo (TVP) que aportan la flexibilidad al modelo. De la misma forma la componente estacional  $\gamma_t$  se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} \gamma_j \\ \gamma_j^* \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \cos \omega_j t & \sin \omega_j t \\ -\sin \omega_j t & \cos \omega_j t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_j \\ \gamma_j^* \end{bmatrix}_{t-1} + \begin{bmatrix} \eta_{jt} \\ \eta_{jt}^* \end{bmatrix} \quad \text{para } j=1,2,\dots,T/2 \quad (5)$$

donde  $\omega_j$ ,  $j=1,2,\dots,T/2$  hace referencia al conjunto de la frecuencia fundamental y sus  $T/2$  armónicos que contiene la serie temporal. En este caso los (TVP) corresponden a los estados  $\gamma_j$  y  $\gamma_j^*$ . La componente irregular  $\varepsilon_t$  se supone aleatoria con una distribución normal de media cero y varianza  $\sigma^2$ . El modelo BSM se puede ajustar a un marco del Espacio de los Estados. Una forma general de escribir el Espacio de los Estados es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{Ecuaciones de estado:} & \quad \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t \\
\text{Ecuaciones de salida:} & \quad z_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + v_t
\end{aligned} \tag{6}$$

donde  $z_t$ ,  $t=1,2,\dots,N$  es la serie temporal escalar;  $\mathbf{x}_t$  es un vector estocástico de dimensión  $nx1$ ;  $\mathbf{w}_t$  y  $v_t$  son vectores de ruido de dimensión  $nx1$  y  $1x1$  respectivamente; y  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{H}$  son las matrices del sistema y de salida respectivamente. Como hipótesis de partida decimos que  $\mathbf{w}_t$  es un ruido Gaussiano con vector de medias cero y matriz de covarianzas  $\mathbf{Q}^*$ . De forma similar, el ruido escalar  $v_t$  es Gaussiano con media cero y varianza  $\sigma_v^2$ . Además ambos ruidos son independientes. Las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{Q}^*$  y  $\sigma_v^2$  son conocidas o han sido estimadas previamente

Las ecuaciones de estado del BSM estarán formadas por un LLT para modelizar la tendencia y seguirán el formato visto en (5) para describir el comportamiento de los armónicos. Por tanto el modelo completo podría escribirse:

$$y_t = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0] \mathbf{x}_t + \varepsilon_t \tag{7}$$

Siendo (7) la ecuación de observación. La evolución de los TVP's ( $\mathbf{x}_t$ ) vendrán dados por la concatenación por bloques de las matrices presentadas en (4) y (5).

El modelo puede ser reparametrizado convenientemente sin perder generalidad mediante una transformación de la matriz de covarianza  $\mathbf{Q}^*$  en un matriz de ratios conocida como la matriz *NVR* (*Noise Variance Ratios*), tal que:

$$NVR = \text{diag} \left( \frac{\sigma_w^2}{\sigma_\varepsilon^2}, \frac{\sigma_{w^*}^2}{\sigma_\varepsilon^2}, \frac{\sigma_j^2}{\sigma_\varepsilon^2} \right) \text{ para } j = 1, 2, \dots, T/2 \tag{8}$$

donde  $\text{diag}(\bullet)$  es una matriz diagonal cuyo elementos pertenecen a la diagonal principal.

El parámetro  $\sigma_\varepsilon^2$  es la varianza del ruido observado, y se utiliza en el modelo BSM para normalizar las varianzas, sin que influya sobre la esencia del modelo. Otra restricción habitual en el modelo es que las varianzas o *NVR*'s correspondientes a cada frecuencia sean los mismos.

Una vez identificados todos los elementos del sistema, el Filtro de Kalman (KF, en inglés) y el algoritmo de Suavizado Fijo (FIS) producirían estimaciones óptimas de sus estados. El problema reside en que es necesario estimar a priori una serie de parámetros desconocidos, que son los *NVR*. Normalmente el método más ampliamente utilizado para estimar los *NVR* es por máxima verosimilitud (ML) en el dominio del tiempo a causa de sus buenas propiedades teóricas en una gran cantidad de aplicaciones. Sin embargo, este método no es el más apropiado cuando el número de parámetros a estimar es alto. En este caso ocurre este fenómeno por lo que se debe acudir a otras alternativas. Afortunadamente, la estimación en el dominio de la frecuencia proporciona una alternativa adecuada a este problema. Además es particularmente interesante porque la estimación es automática en el dominio de la frecuencia dado el comportamiento estacional de la serie temporal de los precios de la electricidad. A continuación se establecen los pasos a seguir para realizar la predicción 24 horas hacia delante:

1. Análisis exploratorio.
2. Establecer el modelo BSM con estacionalidad semanal y diaria incluyendo sus armónicos.
3. Calcular mediante ML en el dominio de la frecuencia los *NVR*.
4. Usar las estimaciones en 3 para ejecutar los algoritmos KF/FIS, para realizar la predicción, interpolación, estimación de la componente de tendencia o de la componente estacional, etc.

La selección de las frecuencias relevantes en una serie temporal es un tema de identificación. Afortunadamente para las series temporales estudiadas en este artículo, correspondientes a los precios de energía eléctrica, se posee un conocimiento a priori de esas frecuencias fundamentales. En nuestro caso particular los periodos estacionales importantes corresponden tanto a  $T=24$  observaciones, que representa una estacionalidad diaria, y  $T=24*7=168$  observaciones, que representa una estacionalidad semanal

La formulación utilizando el modelo de espacio de los estados permite manejar sistemas dinámicos lineales no estacionarios. Si las perturbaciones en el modelo son gaussianos, los algoritmos KF/FIS producen las estimaciones óptimas en el sentido de minimizar los errores cuadráticos medios. La versión de ambos algoritmos usados en este artículo aparecen en el apéndice. Debido a que las predicciones se han de presentar en el mercado diario (en el caso del operador de mercado español) cada 24 horas no es necesario trabajar en línea, por lo que se puede utilizar un algoritmo de suavizado como es el FIS. La aplicación de los algoritmos recursivos KF/FIS necesitan el conocimiento de todas las matrices del sistema  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{Q}^*$ , y  $\sigma_v^2$ .

### 2.3. Estimación del modelo

La estimación de parámetros desconocidos en el modelo (2) se llevará a cabo mediante máxima verosimilitud en el dominio de la frecuencia, ver Harvey (1989). Se utiliza esta técnica en vez del método de máxima verosimilitud en el dominio del tiempo porque éste último presenta serios problemas cuando el número de parámetros a estimar es grande, como es el caso estudiado en este trabajo. Este método está basado en la transformada de Fourier que permite escribir la función de verosimilitud en la siguiente forma:

$$\log(L) = -\frac{1}{2}T \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{T-1} \log(g_j) - \pi \sum_{j=0}^{T-1} \frac{I(\omega_j)}{g_j} \quad (9)$$

donde  $I(\omega_j)$  y  $g_j$  son respectivamente el espectro empírico (o periodograma),

$$I(\omega_j) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=1}^T y_t e^{-i\omega_j t} \right|^2 \quad (10)$$

y la función generatriz espectral,

$$g_j = g \left[ e^{i\omega_j t} \right] \quad (11)$$

definida en los puntos  $\omega_j = 2\pi j/T$ ,  $j = 0, \dots, T-1$ . Los parámetros desconocidos,  $NVR$ , aparecen en la función generatriz espectral y por tanto la estimación ML involucra la búsqueda de diferentes valores de  $NVR$  y por tanto de  $g_j$ , hasta que (9) sea máximo. El método se encuentra desarrollado en más detalle en Harvey (1989).

### 3. Caso de estudio

El mercado de electricidad español es el conjunto de transacciones procedentes de la participación de los agentes del mercado en las sesiones del mercado diario e intradiario y de la aplicación de los procedimientos técnicos del operador del sistema. El mercado cubre un área con una población de más de 40 millones de personas. En 2005 la producción final de electricidad estuvo sobre 246 millones de MWh. El operador del mercado ([www.omel.es](http://www.omel.es)) se encarga de realizar las operaciones económicas. Por otro lado el operador del sistema ([www.ree.es](http://www.ree.es)) se encarga de las operaciones técnicas. La comisión nacional de la energía ([www.cne.es](http://www.cne.es)) vela por que las actividades del mercado se lleven a cabo en régimen de libre competencia.

El modelo BSM se ha aplicado a los precios procedentes del mercado eléctrico español, cuyos datos se han obtenido de la página Web del operador de mercado ([www.omel.es](http://www.omel.es)). Los cálculos realizados se han desarrollado en el entorno MATLAB. En la Figura 1 se ha dibujado la serie temporal correspondiente a los precios de energía eléctrica en el mercado español durante el año 2002. Se puede observar que al principio del año hay un fuerte incremento de los precios de energía eléctrica.

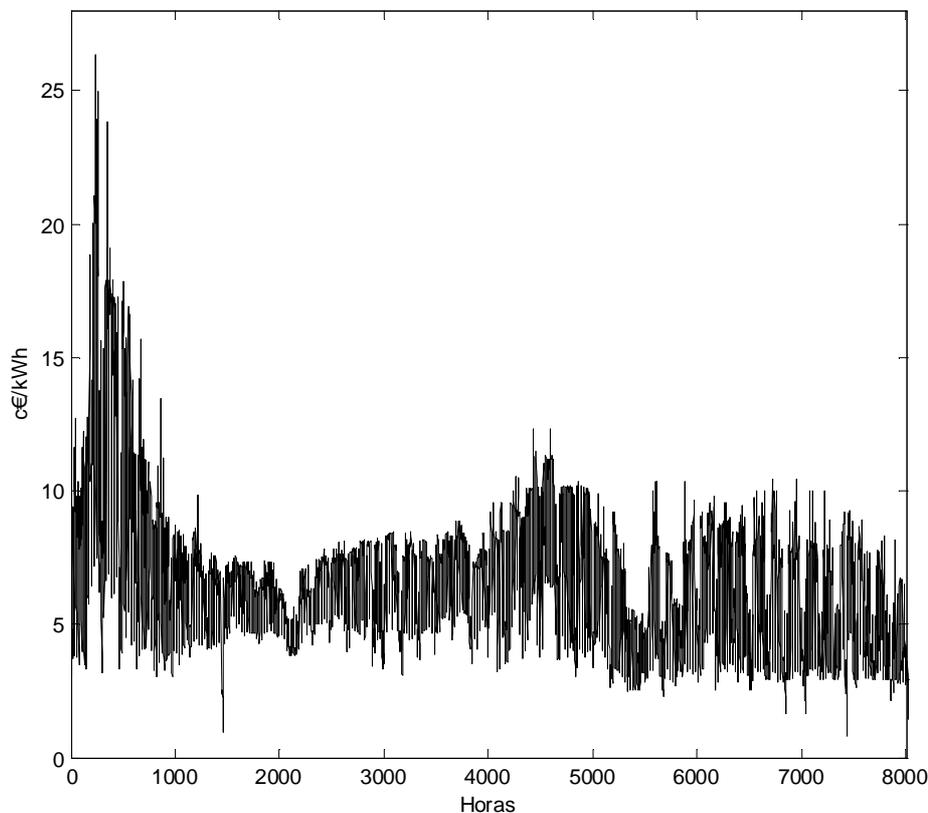


Figura 1. Precios horarios del mercado eléctrico español.

Con el fin de comparar el modelo propuesto se ha diseñado un modelo ARIMA identificado automáticamente. El procedimiento de identificación consiste en seleccionar el mejor modelo ARIMA con estacionalidad diaria y semanal de un amplio rango de posibilidades de acuerdo a *Schartz Bayesian Criterion (SBC)* que combina el ajuste del modelo con el número de parámetros utilizados, para evitar la sobre-parametrización, de forma que:

$$SBC = -2L\left(\sum \hat{a}_t^2\right) + K \ln(n) \quad (12)$$

donde  $\hat{a}_t$  son los residuos del modelo,  $K$  es el número de parámetros utilizados, y  $n$  es el número de residuos calculados para el modelo. El mejor modelo es aquel con el valor  $SBC$  más bajo, ver Schwarz (1978).

Los modelos ARIMA estudiados incluyen órdenes de 1 a 3 tanto para la parte autorregresiva (AR) como para la media móvil (MA) (incluyendo parte regular, estacionalidad diaria y semanal), y varios órdenes para realizar las diferencias. De modo que los modelos estimados incluyen combinaciones de diferentes órdenes desde 0 a 2; y polinomios MA y/o AR desde 0 a 6 (regular), 0 a 3 (diaria) y 0 a 2 (semanal).

El ejercicio predictivo consiste en realizar la predicción de 24 horas hacia delante durante la última semana de cada mes del año, teniendo en cuenta la información correspondiente a los 53 días anteriores. Las comparaciones de las predicciones de ambos modelos se llevarán a cabo de acuerdo al Error absoluto medio normalizado (NMAE):

$$NMAE = \frac{1}{24} \frac{\sum_{l=1}^{24} |\hat{z}_{t+l} - z_{t+l}|}{\bar{z}_{t+l}} \cdot 100 \quad (13)$$

donde  $\hat{z}_{t+l}$  y  $z_{t+l}$  son los valores correspondientes a la predicción de la demanda y su valor real respectivamente, adelantados  $l$  pasos hacia delante respecto al tiempo  $t$ . El valor  $\bar{z}_{t+l}$  será la media muestral de los  $l$  valores reales utilizados en la predicción. La razón de normalizar el error absoluto con la media muestral es para evitar valores de errores sobrevalorados cuando los precios son cercanos a cero.

En la Tabla I se muestran los errores cometidos en la predicción de la última semana de cada mes del año 2002 para el mercado eléctrico español. En dicha tabla se puede observar que el modelo BSM proporciona menores errores de predicción en 8 de los 12 meses, donde se ha resaltado en negrita el menor error de predicción cometido en cada mes. Se puede observar que los errores están en torno a un 10% de acuerdo a la medida de error definida en (13). Siendo el mes de febrero el que menor error presente y el mes de diciembre el que mayor error alcanza dado la gran irregularidad de dicho mes. Además la media del NMAE para los 12 meses también es menor para el modelo BSM.

En la Figura 2 se muestra un ejemplo de predicción 24 horas hacia delante durante un periodo de una semana. En línea continua se ha representado los valores reales de los precios de electricidad mientras que la predicción de dichos precios está dibujada mediante línea discontinua. En dicha figura se aprecia el patrón estacional cada 24 y 168 horas.

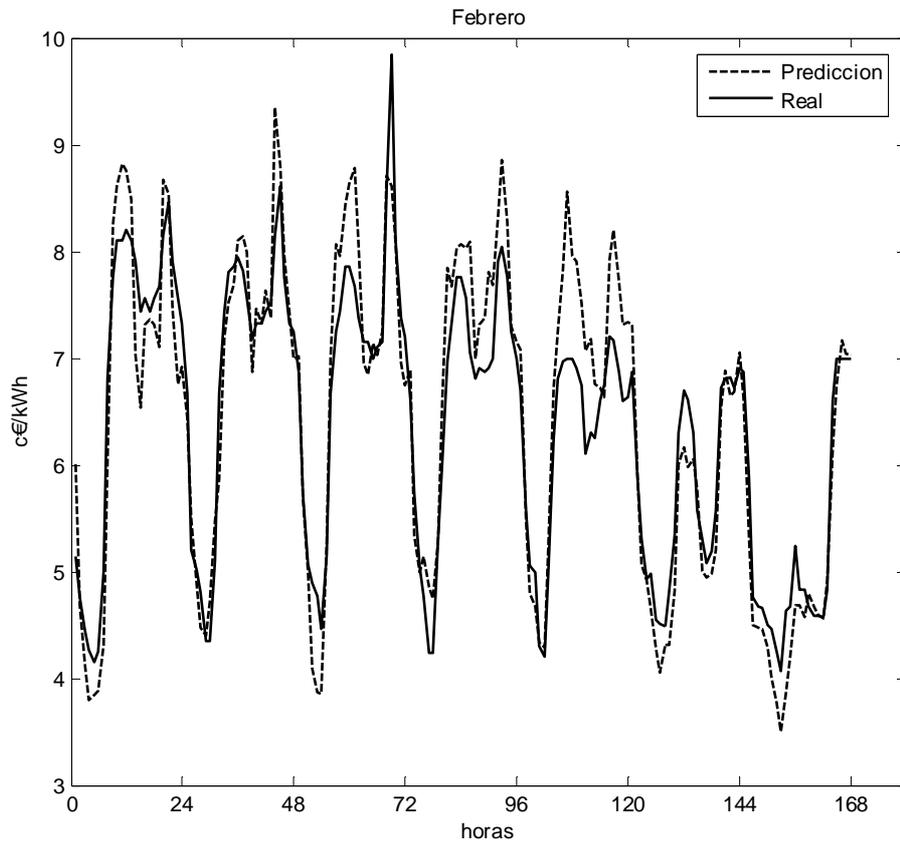


Figura 2. Predicción de la última semana de febrero 2002.

Tabla I. Errores NMAE cometidos en la predicción de la última semana del mercado eléctrico español.

Meses	NMAE	
	BSM	AR-auto
Enero	<b>16.16</b>	26.4
Febrero	<b>6.3</b>	8.54
Marzo	10.38	<b>8.87</b>
Abril	<b>10.07</b>	12.07
Mayo	12.3	<b>8.73</b>
Junio	<b>11.82</b>	12.17
Julio	<b>11.62</b>	14.48
Agosto	<b>17.04</b>	17.37
Septiembre	<b>10.56</b>	10.97
Octubre	11.85	<b>11.66</b>
Noviembre	16.46	<b>13.13</b>
Diciembre	<b>27.96</b>	34.03
<b>Media</b>	<b>13.54</b>	<b>14.86</b>

## 4. Conclusiones

En el presente artículo se ha mostrado una herramienta de predicción a corto plazo, de precios de energía eléctrica, completamente automática basada en un modelo de componentes no observables expresado en forma de espacio de los estados y actualizado mediante el filtro de kalman. Esta herramienta presenta varias ventajas que vamos a resumir:

- La estimación se realiza mediante máxima verosimilitud en el dominio de la frecuencia, dada la múltiple estacionalidad de las series estudiadas. Este dominio nos permite identificar de una manera objetiva las frecuencias a incluir, automatizando así la realización de dichas tareas. Debido al gran número de armónicos la estimación mediante máxima verosimilitud en el dominio del tiempo puede no converger.
- Debido a la utilización de un filtro adaptativo como es el filtro de kalman nos aseguramos que nuestro modelo se adapte a los cambios ocurridos en las series temporales.
- El marco de espacio de los estados empleado nos permite extraer información muy valiosa como puede ser la tendencia o la componente estacional de las series.
- Los errores de predicción calculados son muy competitivos. En el caso de los precios del mercado español son en torno al 10%.

Se ha comparado el método propuesto con otra metodología ampliamente utilizada, como es la Box-Jenkins. Además es posible la extracción de información tan valiosa como la tendencia, sus componentes estacionales y el error cometido con el fin de que los gerentes puedan incluirlos en sus sistemas de información para realizar sus estrategias de oferta/compra.

Todas estas ventajas tanto técnicas como de gestión sitúan nuestra herramienta en una posición privilegiada para su uso en los mercados eléctricos de cara a su aplicación por parte de los diferentes agentes del mercado

## Apéndice

Los algoritmos del filtro de kalman y el suavizado de intervalo fijo aplicados a los casos de estudio en este artículo se pueden escribir en un formato general de espacio de los estados de la siguiente manera:

### 1. Filtro de kalman:

a) Ecuaciones de predicción:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{t-1} \\ \hat{\mathbf{P}}_{t|t-1} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{P}}_{t-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}\end{aligned}$$

b) Ecuaciones de actualización:

$$\begin{aligned}F_t &= \left[ 1 + \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{P}}_{t|t-1} \mathbf{H}_t^T \right] \\ \hat{\mathbf{x}}_t &= \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \hat{\mathbf{P}}_{t|t-1} \mathbf{H}_t^T (z_t - \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) / F_t \\ \hat{\mathbf{P}}_t &= \hat{\mathbf{P}}_{t|t-1} - \hat{\mathbf{P}}_{t|t-1} \mathbf{H}_t^T \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{P}}_{t|t-1} / F_t\end{aligned}$$

### 2. Suavizado de intervalo fijo

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{t|N} &= \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \hat{\mathbf{P}}_{t|t-1} \mathbf{s}_{t-1} \\ \hat{\mathbf{P}}_{t|N} &= \hat{\mathbf{P}}_{t|t-1} - \hat{\mathbf{P}}_{t|t-1} \mathbf{S}_{t-1} \hat{\mathbf{P}}_{t|t-1} \\ \mathbf{s}_{t-1} &= \mathbf{H}_t^T (z_t - \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}) / F_t + \overline{\mathbf{\Phi}}_t^T \mathbf{s}_t \quad \text{with } \mathbf{s}_N = \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{t-1} &= \mathbf{H}_t^T \mathbf{H}_t / F_t + \overline{\mathbf{\Phi}}_t^T \mathbf{S}_t \overline{\mathbf{\Phi}}_t \quad \text{with } \mathbf{S}_N = \mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{\Phi}}_t &= \mathbf{\Phi}_t - \mathbf{\Phi}_t \hat{\mathbf{P}}_{t|t-1} \mathbf{H}_t^T \mathbf{H}_t / F_t\end{aligned}$$

## Referencias

- Conejo, A; Contreras J, Espínola R, Plazas M. (2005) Forecasting electricity prices for a day-ahead pool-based electric energy market, *International Journal of Forecasting*, Vol. 21, pp. 435-462.
- Contreras, J; Espínola R.; Nogales, F.J.; Conejo A. (2003). ARIMA models to predict next-day electricity prices, *IEEE Trans. Power Syst.*, Vol. 18, pp. 495-500.
- Harvey, A. C. (1989) *Forecasting Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Harvey, A. C.; Koopman, S. J. (1993). Forecasting hourly electricity demand using time-varying splines. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 88, pp. 1228-1242.
- Kumluca, A.; Erkmén, I. (2003), A hybrid learning for neural networks applied to short term load forecasting, *Neurocomputing*, Vol. 51, pp.495-500.
- Pedregal D. J.; Young P. C. (2002) Statistical approaches to modelling and forecasting time series. In Clemens, M. and Hendry, D. (eds.). *Companion to Economic Forecasting*. Blackwell Publishers, pp. 69-104.
- Pedregal D. J.; Young, P. C. (2006). Modulated cycles, a new approach to modelling seasonal/cyclical behaviour in unobserved component models. *International Journal of Forecasting*, 22, pp. 181-194.
- Trapero J. R. (2003), Modelización de mercados eléctricos mediante modelos de componentes no observables, Proyecto final de carrera. Área de organización de empresas, ETS Ingenieros Industriales, Universidad de Castilla-La Mancha.
- Tych, W.; Pedregal D. J.; Young, P. C.; Davies. J. (2002) A software package for multi-rate unobserved component forecasting of telephone call demand, *International Journal of Forecasting*, vol. 18, pp. 673-695.
- West, M.; Harrison, J. (1989) *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*, New Cork: Springer-Verlag.
- Young, P.C. (1994) Time-variable parameter and trend estimation in Nonstationary economic time series. *Journal of Forecasting*, vol. 13, pp. 179-210.
- Young, P.C.; Pedregal D.J.; Tych, W. (1999), Dynamic Harmonic Regression, *Journal of Forecasting*, vol. 18, pp. 369-394.
- Schwarz G. (1978) Estimating the dimension of a model, *Annals of Statistics*, vol. 6, pp. 461-464.
- Trapero, J.R.; Pedregal D.J.; García F.P. (2006), Predicción de precios y demandas de energía eléctrica basada en modelos de regresión armónica dinámica. *IX Congreso de Ingeniería de Organización*, Gijón.