

## Análisis del ciclo económico basado en filtros adaptativos de ranura\*

Juan R. Trapero Arenas, Diego J. Pedregal Tercero

Dpto. de Administración de Empresas. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Ciudad Real. Instituto de matemática aplicada a la ciencia y la ingeniería. Universidad de Castilla-La Mancha. Edificio politécnica, 13071. Ciudad Real. JuanRamon.Trapero@uclm.es, Diego.Pedregal@uclm.es

### Resumen

*El análisis del ciclo económico ha atraído la atención de numerosos estudios e investigadores dado el importante papel que juega en el desarrollo de diferentes economías. Hasta ahora, las técnicas utilizadas para la extracción del ciclo se basan en filtros de paso bajo o paso banda. Entre esta clase de filtros se puede encontrar el conocido filtro de Hodrick-Prescott. Sin embargo, este tipo de filtros solo deja un rango donde la frecuencia del ciclo puede localizarse. En este trabajo se presenta un filtro adaptativo de ranura que aporta información sobre la evolución del periodo del ciclo económico en función del tiempo. Esto es posible dadas las propiedades de robustez frente al ruido y la capacidad de seguimiento de dichos filtros. Con el fin de ilustrar el uso de esta técnica se ha elegido como caso de estudio el índice de producción industrial de EEUU.*

**Palabras clave:** ciclo económico, filtro adaptativo, estimación de frecuencia, Espacio de los Estados.

### 1. Introducción

Desde el siglo XIX diferentes investigadores han realizado un gran esfuerzo en buscar una explicación a las dramáticas caídas que cada cierto tiempo registraba la actividad económica. En 1863, el francés Clement Juglar demostró con pruebas estadísticas, que las crisis no eran fenómenos aislados, sino parte de una fluctuación cíclica de la actividad comercial, bursátil e industrial y que los periodos de prosperidad y crisis se seguían unos a otros. Este fue uno de los trabajos pioneros en torno al ciclo económico. Actualmente, una definición de ciclo económico generalmente aceptada podría ser la dada por el NBER (Nacional Bureau of Economic Research): “fluctuaciones encontradas en la actividad económica agregada, de duración media 4 años y rango entre 1-12”.

Esta sucesión de subidas y bajadas con un rango tan amplio de variación del periodo demuestra que la actividad económica es variante. Es por esto que intentar buscar una explicación a estos fenómenos es de vital importancia, ya que cuanto mayor sea nuestro conocimiento sobre esta dinámica mayor serán nuestros recursos para anticiparse y tomar las medidas oportunas.

Al margen de las posibles explicaciones teóricas que indaguen sobre las causas del ciclo económico, gran parte de la investigación llevada a cabo sobre este tema se centra en la utilización de series temporales para modelizar este fenómeno. Hay que destacar el trabajo de Burns y Mitchell (1946) “*Measuring the Business Cycle*”, el cuál puede ser considerado un primer paso hacia la evaluación empírica sobre esta materia. De hecho, uno de los temas que mayor número de publicaciones atrae es la obtención del ciclo económico a partir del indicador económico estudiado. En otras palabras, dada una serie temporal qué parte de la señal corresponde a la tendencia, al ciclo o a la componente irregular. Por ejemplo, el filtro presentado por Hodrick y

---

\* Este trabajo está parcialmente financiado por la conserjería de educación y ciencia de la junta de comunidades de Castilla-La Mancha y el fondo social europeo.

Prescott (1997) es comúnmente utilizado para este propósito. Una extracción de la tendencia más general puede ser realizado usando filtros paso banda del tipo Butterworth, ver Harvey and Trimbur (2003), Kaiser y Maravall (1999), Bógalo y Quilis (2003) entre otros. Por otro lado, se ha demostrado que los resultados de suavizado obtenidos por el filtro de Hodrick y Prescott (HP) son equivalentes a los obtenidos por el Suavizado de Intervalo Fijo (FIS) enmarcado en un problema de Espacio de los Estados estocástico, ver Young y Pedregal (1999).

Por tanto, el uso de filtros paso bajo, alto o banda se está explotando actualmente en esta aplicación. No obstante, este tipo de técnicas delimita un ancho de banda donde se supone se encuentra el ciclo económico, pero no aportan información acerca de cómo varía la frecuencia en función del tiempo.

Con el fin de solucionar este problema los autores creen que hay una herramienta que hasta ahora ha pasado desapercibida y que puede arrojar algo de luz a la estimación del periodo correspondiente al ciclo económico. Esta herramienta es relativamente novedosa y proviene del campo del control, dentro de los filtros adaptativos de ranura (*Adaptive Notch Filters*). Concretamente, Hsu *et al.* (1999) desarrolló un filtro adaptativo de ranura globalmente convergente para la estimación de la frecuencia de una señal senoidal, es decir, asegura la convergencia de la estimación independientemente de las condiciones iniciales. Este trabajo reavivó el interés por la estimación en línea de los parámetros de una onda senoidal desde un punto de vista de control no lineal. Así pues, en el trabajo desarrollado por Hou (2005) se extiende este estimador globalmente convergente para la estimación de la amplitud. Las ventajas de este tipo de filtros son su alta robustez al ruido y la capacidad de seguimiento de la frecuencia de la señal cuando dicha frecuencia varía en el tiempo, Clarke (2001).

En el presente trabajo se pretende aprovechar las características de los filtros adaptativos de ranura para estimar el periodo cambiante del ciclo económico utilizando como indicador económico el índice de la producción industrial de los EEUU.

El artículo está organizado de la siguiente forma: El primer apartado trata la problemática de la estimación de una frecuencia variante en el tiempo y se propone como estimador un filtro no lineal adaptativo. Con el fin de comprobar el estimador propuesto, el tercer apartado se dedica a la aplicación del filtrado adaptativo a la serie temporal formada por el índice de producción industrial de los EEUU. Finalmente, el último apartado resume las principales conclusiones del trabajo.

## 2. Filtro adaptativo de ranura

En el presente trabajo, el ciclo económico se modela a partir de una onda senoidal dada por la siguiente ecuación:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (1)$$

donde  $A$  es la amplitud de la onda,  $\omega$  es la frecuencia en (rad/s) y  $\phi$  es la fase. El problema de estimar los parámetros en una señal senoidal ha abarcado considerable atención en la pasada década. Aunque el problema posee una solución tecnológica simple en el área de la electrónica analógica, la literatura de control de sistemas, sólo recientemente, ha proporcionado diferentes soluciones, basadas principalmente en técnicas matemáticas dominadas por el control no lineal adaptativo.

Los métodos utilizados hasta ahora para solucionar este problema abarcan un amplio rango de metodologías, un estado del arte sobre el tema se puede encontrar en Stoica (1993) y una referencia más reciente es la presentada por Trapero *et al.* (2007). Los métodos clásicos incluyen la maximización del periodograma (MP) y la regresión no lineal por mínimos cuadrados (NLS). Ambos MP y NLS son estadísticamente eficientes para la estimación de la frecuencia en el sentido que el error de estimación alcanza la cota de Cramér-Rao, ver Kay y Marple (1981). Sin embargo, ambas técnicas MP y NLS requieren algoritmos iterativos de optimización para calcular las estimaciones, valores iniciales bastante precisos para asegurar la convergencia y pueden presentar problemas cuando la frecuencia no es constante. Por este motivo, los filtros adaptativos de ranura (ANF) pueden ser una mejor alternativa.

En Hou (2005), se propuso un ANF globalmente convergente para la estimación de la frecuencia y amplitud de una onda senoidal proporcionando una formalización matemática del problema. El algoritmo capaz de estimar la frecuencia de una señal senoidal está basado en el siguiente sistema de segundo orden:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -\alpha_1 z + (\alpha_2 y^2 / 2 - \eta - \alpha_1^2) \\ \dot{\eta} &= \alpha_2 y (z + \alpha_1 y) \\ \hat{\vartheta} &= \eta - \alpha_2 y^2 / 2 \end{aligned} \quad (2)$$

Donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son número reales positivos que definen el comportamiento del estimador de frecuencia. Los estados de sistema vienen definidos por las variables  $\dot{z}$  y  $\dot{\eta}$ . El parámetro  $\hat{\vartheta}$  converge a  $\omega^2$  cuando  $t \rightarrow \infty$  para estados iniciales  $z(0)$  y  $\vartheta(0)$  arbitrarios, la propiedad de convergencia global está demostrada en Hou (2005).

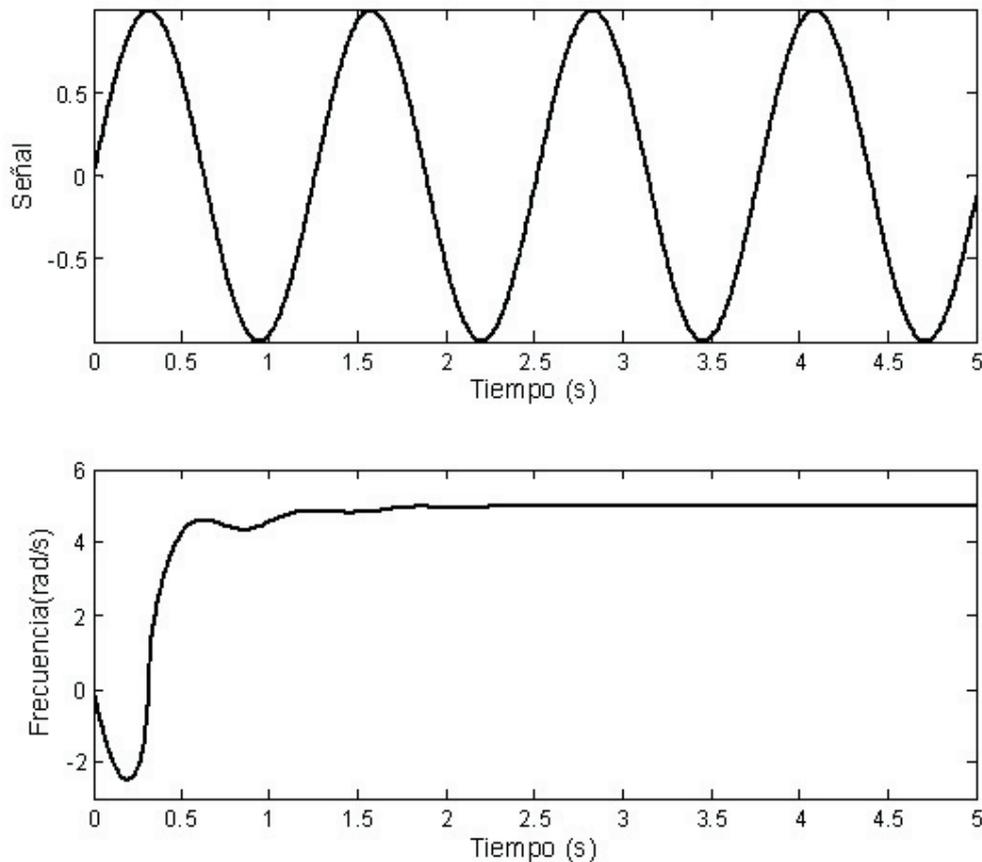
En el presente trabajo se ha optado por utilizar el filtro de Hou, ya que ha mostrado ser muy robusto. No obstante, otros estimadores de frecuencia podrían funcionar de forma similar, ver Trapero *et al.* (2007).

## 2.1. Simulaciones

Con el fin de mostrar las características del estimador mostrado en (2), se proponen una serie de simulaciones realizadas en el entorno SIMULINK de MATLAB. En primer lugar, la onda senoidal utilizada en la simulación posee una frecuencia constante, donde  $A=1$ ,  $\omega = 5$  y  $\phi = 0$ . Los parámetros de diseño elegidos son:  $\alpha_1 = 5$  y  $\alpha_2 = 0$ . Es importante destacar que el diseño de parámetros se basa en prueba y error y no hay una metodología clara para una elección óptima. Aunque esto sea una debilidad de este tipo de filtro, no supone un problema de cara a su implantación práctica, ya que se pueden probar los valores de los parámetros que mejor se ajustan a nuestros intereses. Normalmente hay que establecer un compromiso entre la sensibilidad al ruido del estimador y la capacidad de seguimiento del mismo. Para más información sobre diseño de parámetros consultar Clarke (2001).

La Figura 1 muestra la señal utilizada en la simulación (arriba) y la estimación de la frecuencia de dicha onda (abajo). Se puede observar que a partir de un ciclo la estimación se acerca bastante a su valor real. Sin embargo, en el caso de la estimación de la frecuencia del ciclo económico, dicha frecuencia varía con el tiempo, es decir, no es constante. Por este motivo, en la siguiente simulación, se propone un ejemplo donde la frecuencia no sea constante. Por ejemplo, supongamos que se produce un cambio brusco en la frecuencia de la señal de 10 rad/s

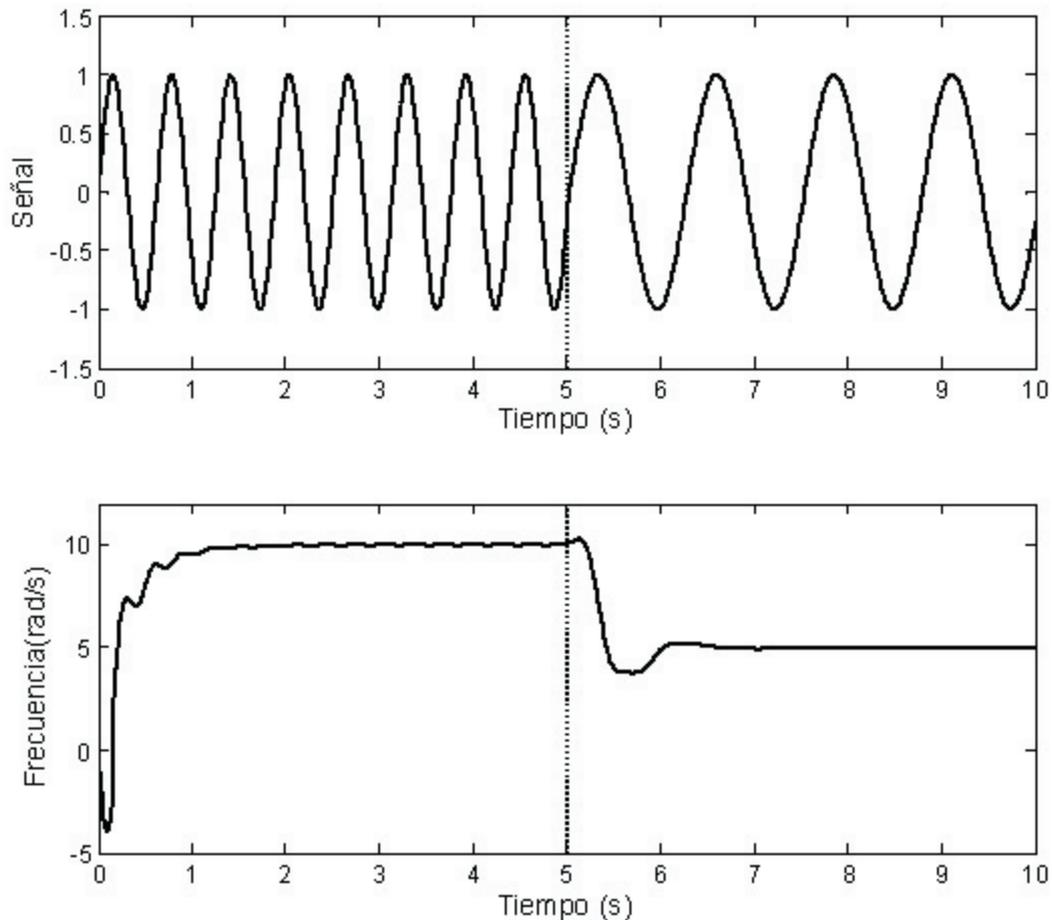
a 5 rad/s manteniendo la misma amplitud y fase de la simulación anterior. En la parte superior de la Figura 2 se observa como la señal cambia de frecuencia a los 5 segundos de comenzar la simulación. En la parte inferior de la misma figura se expone la evolución de la estimación de la frecuencia. Es interesante destacar la rapidez con que el estimador se adapta al cambio. Respecto los valores de los parámetros utilizados en esta ocasión ( $\alpha_1 = 100$  y  $\alpha_2 = 0$ ), se han elegido por prueba y error hasta que los resultados han sido satisfactorios.



**Figura 1.** Arriba, señal senoidal simulada con frecuencia 5 (rad/s). Abajo, estimación de la frecuencia con el método de Hou, con  $\alpha_1 = 5$  y  $\alpha_2 = 0$

### 3. Caso de estudio

El indicador económico utilizado para analizar el ciclo económico es el índice de producción industrial (IPI) de los EEUU perteneciente a los años 1959-1997. Aunque este índice representa solamente un sector de la economía total, históricamente ha capturado gran parte de sus fluctuaciones.

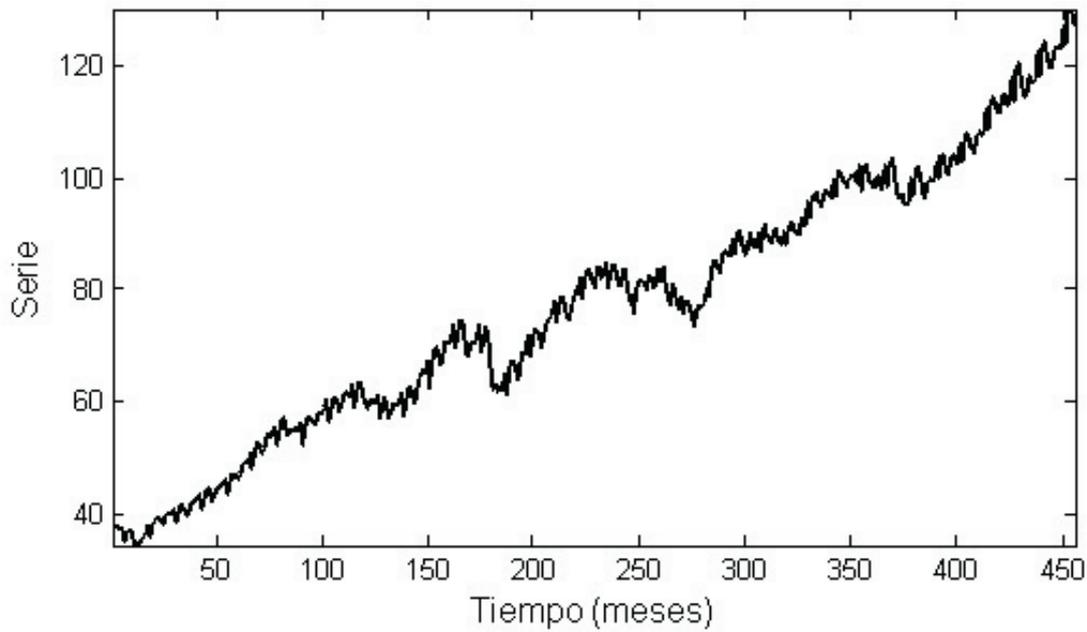


**Figura 2.** Arriba, señal senoidal simulada con cambio de frecuencia de 10 a 5 (rad/s) Abajo, estimación de la frecuencia con el método de Hou, con  $\alpha_1 = 100$  y  $\alpha_2 = 0$

La Figura 3 muestra la serie temporal del IPI de los EEUU. El ciclo económico de esta serie se ha extraído mediante el filtro de Hodrick-Prescott (1980) y se muestra en la Figura 4.

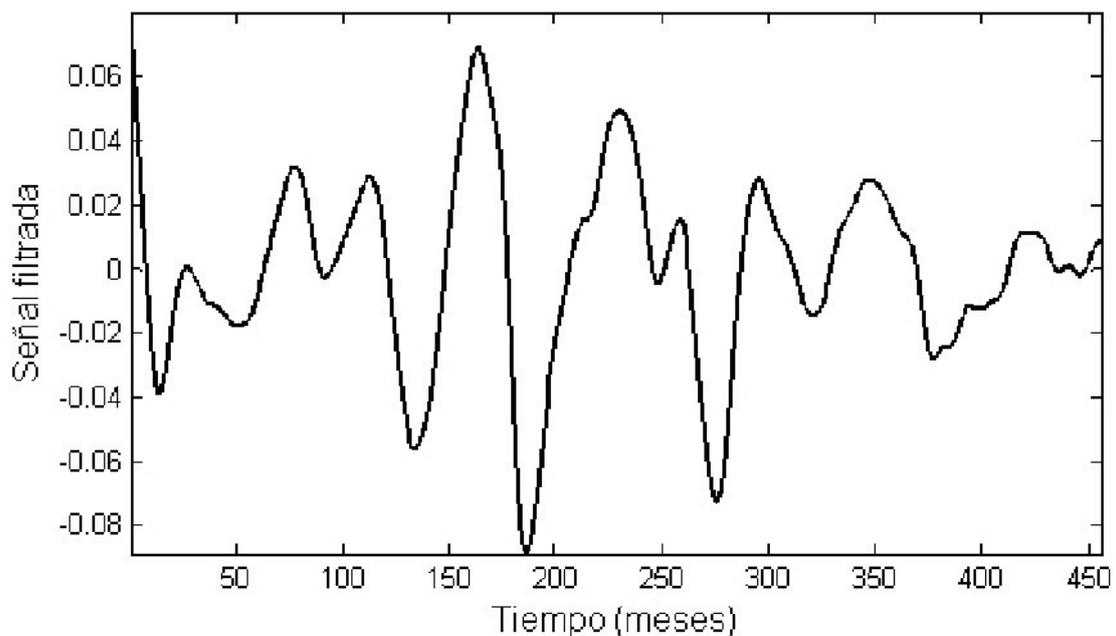
Hasta ahora toda la información que se puede extraer del ciclo económico se muestra en la Figura 4. Sin embargo, en este trabajo se pretende dar un paso adelante utilizando el filtro adaptativo de ranura globalmente convergente. El interés de este filtro es poder analizar la evolución de la frecuencia del ciclo económico, no solo el rango donde éste se encuentra.

Hay que señalar que en numerosos estudios se supone que la frecuencia del ciclo económico es constante, aunque como se puede observar en la Figura 4, tal hipótesis no es cierta. La idea de utilizar el filtro adaptativo de ranura es poder superar la limitación de la hipótesis de frecuencia constante con una estimación de la evolución de la frecuencia mediante el método presentado en el apartado anterior.



**Figura 3.** Serie temporal correspondiente al índice de producción industrial de EEUU

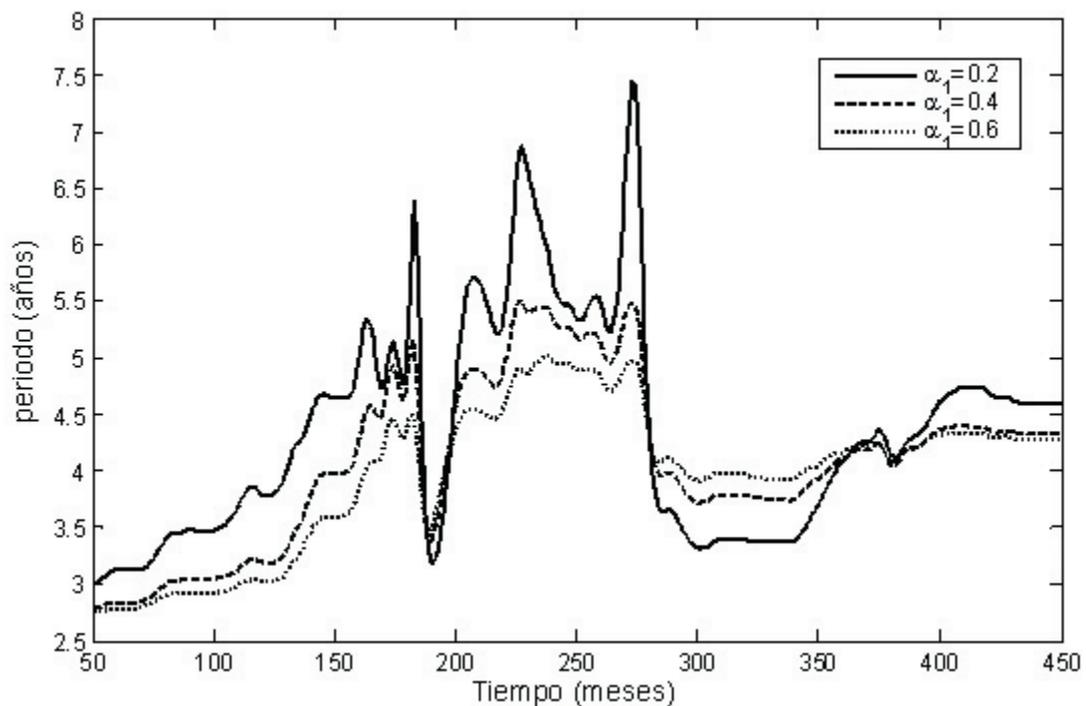
El problema práctico que es necesario afrontar es decidir los valores de los parámetros de diseño,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , ya que en función de dicha elección el estimador llegará a un compromiso entre la robustez al ruido o la sensibilidad de los cambios de frecuencia. Por tanto, ante la ausencia de una metodología sistemática para la elección de parámetros de diseño, se introducirán diferentes valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  hasta alcanzar unos resultados razonables.



**Figura 4.** Señal filtrada

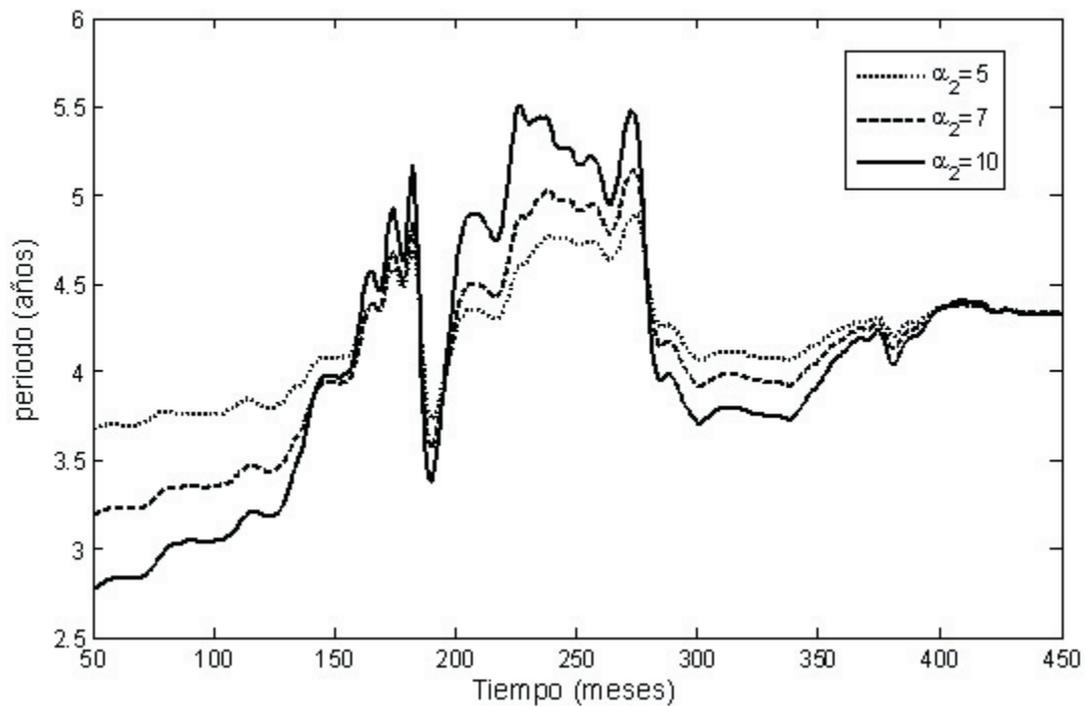
Para analizar el efecto de los parámetros de diseño sobre la estimación de la frecuencia se ha propuesto el siguiente ejercicio. Se varía el valor de  $\alpha_1$  entre 0.2, 0.4 y 0.6, dejando fijo  $\alpha_2 = 0$ . La Figura 5 muestra la estimación de la frecuencia obtenida a partir de la señal filtrada (ver Figura 4). El eje X hace referencia a la escala de tiempo en que se mide la serie temporal (meses), mientras que el eje Y describe la estimación de la frecuencia proporcionada por el estimador expresada en forma de periodo. Recordar que  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , donde  $\omega$  está expresado en (rad/s) y T es el periodo expresado en meses. Sin embargo por hacer más intuitiva la figura el periodo se muestra en años.

En esta misma figura se puede observar que si se incrementa el valor de  $\alpha_1$  el estimador se vuelve menos sensible a los cambios producidos en la señal aumentando así su robustez al ruido. No obstante, el patrón de la evolución del periodo se mantiene parecido.



**Figura 5.** Estimación del periodo mediante el ANF variando  $\alpha_1$  entre 0.2, 0.4 y 0.6 y dejando fijo  $\alpha_2 = 0$

El mismo ejercicio se puede aplicar dejando fijo el valor de  $\alpha_1 = 0.4$  y variando  $\alpha_2$  entre 5, 7 y 10. Los resultados de tal variación se pueden observar en la Figura 6, donde incrementos en el parámetro  $\alpha_2$  aumentan la sensibilidad a cambios producidos en la señal. También, es interesante destacar la coincidencia entre las estimaciones al final de la muestra. Tanto en la Figura 5 como en la Figura 6 no se han mostrado las primeras 50 observaciones ya que la estimación es oscilante debido al transitorio del estimador hasta que alcanza el periodo de la señal.

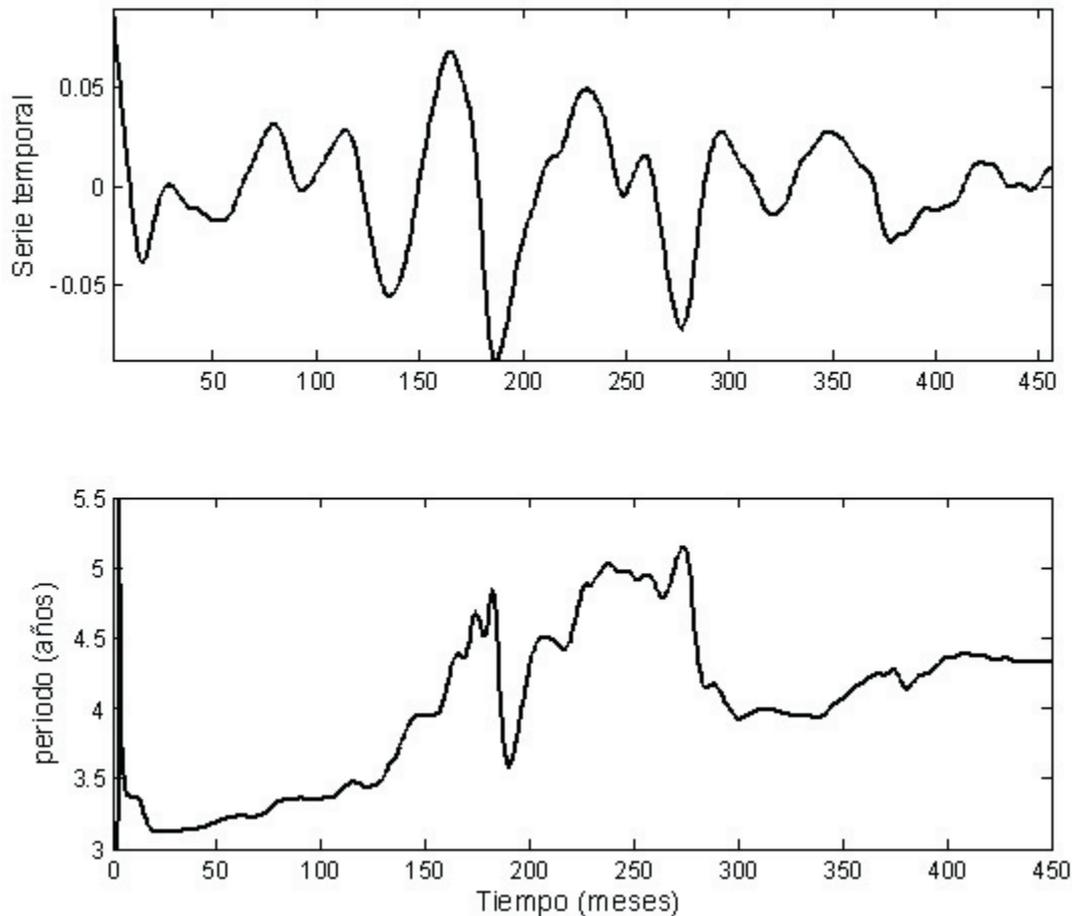


**Figura 6.** Estimación del periodo mediante el ANF variando  $\alpha_2$  entre 5, 7 y 10 y dejando fijo  $\alpha_1 = 0.4$

Una vez realizado este estudio, parece razonable elegir como parámetros de diseño los siguientes valores:  $\alpha_1 = 0.4$  y  $\alpha_2 = 7$ .

Con el fin de facilitar la discusión de los resultados, se ha dibujado la serie temporal filtrada y la estimación del periodo de dicha serie con los parámetros  $\alpha_1 = 0.4$  y  $\alpha_2 = 7$ , en la parte superior e inferior de la Figura 7, respectivamente. En primer lugar se puede observar a simple vista que el periodo medio de la señal está alrededor de 4 años como se mencionó en la introducción. Además, observando la estimación del periodo se puede concluir que los crecimientos económicos tienen una mayor duración que las recesiones, es decir, si la serie temporal aumenta el periodo también lo hace. Obviamente, la estimación del periodo sufre de un cierto retardo, desde que se produce el cambio de frecuencia en la serie hasta que el estimador se adapta a dicho cambio. Finalmente, de acuerdo a la estimación del periodo presentada en la figura 7 la evolución en promedio de dicho periodo es creciente, de modo que la duración del ciclo tiende a aumentar hasta el final de la muestra, donde luego permanece constante.

A pesar de que estas conclusiones ya estaban mencionadas en la literatura del análisis del ciclo económico de una manera cualitativa, ver Keynes (1936) y Burns y Mitchell (1946). Estas afirmaciones no eran muy precisas, según apunta Engel *et al.* (2005). En este trabajo, gracias al filtro adaptativo de ranura estas afirmaciones pueden ser cuantificadas. De modo que muchas herramientas econométricas o estadísticas pueden ser aplicadas de una forma directa, donde el periodo del ciclo económico puede ser tratado como un dato conocido. De hecho, esta estimación puede ser utilizada para una mayor comprensión del ciclo tanto si el objetivo es el análisis como si es la predicción.



**Figura 7.** (Arriba) Serie temporal filtrada. (Abajo) Estimación del periodo mediante el ANF con  $\alpha_1 = 0.4$  y  $\alpha_2 = 7$ .

#### 4. Conclusiones

En el presente trabajo se ha estudiado el fenómeno del ciclo económico desde un punto de vista de filtrado de señal. Hasta ahora el ciclo económico se extraía mediante filtros de paso banda como el conocido filtro de Hodrick-Prescott. Aquí se ha propuesto avanzar en el análisis del ciclo económico mediante filtros adaptativos de ranura globalmente convergentes, concretamente se ha utilizado un filtro no lineal proveniente de la disciplina del control.

Se ha formulado el ciclo económico como una onda senoidal cuya frecuencia puede variar en el tiempo. Aunque este problema es no lineal, hay una gran cantidad de soluciones al respecto. Sin embargo, solo recientemente se ha conseguido una técnica adaptativa robusta con una base matemática muy sólida. Entre las ventajas de este filtro se encuentra su alta robustez al ruido y su buena capacidad de seguimiento de la frecuencia de la onda. No obstante, para el uso de este filtro es necesario ajustar dos parámetros de diseño.

En este trabajo se ha aplicado el filtro adaptativo para analizar la evolución del periodo del ciclo económico, el cual ha sido extraído mediante un filtro de Hodrick-Prescott a partir del índice de producción industrial norteamericano. También, se analizó el efecto de los parámetros de diseño sobre dicha serie, llegando a un compromiso entre la robustez al ruido y la sensibilidad ante cambios de frecuencia. Finalmente, evaluando la estimación del periodo se observó que

las expansiones y contracciones del ciclo tienen una duración diferente, y se calculó esta duración.

A pesar de que este trabajo se ha centrado sobre el estimador de frecuencia. Un análisis completo del ciclo económico debe incorporar las razones históricas que expliquen las causas de los cambios de periodo ocurridos en la serie. Este análisis histórico puede conducir a un diseño de parámetros más adecuado.

## Referencias

- Burns, A.M.; Mitchell, W.C. (1946). *Mesuring Business Cycles*. NBER, New York.
- Bógalo, J.; Quilis E.M. (2003). Estimación del ciclo económico mediante filtros de Butterworth. Instituto Nacional de Estadística. Boletín Trimestral de Coyuntura nº 87.
- Clarke, D.W. (2001). On the design of adaptive notch filters, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 15, pp. 715-744.
- Engel, J.; Haugh, D.; Pagan, A. (2005). Some methods for assessing the need for non-linear models in business cycle analysis, *International Journal of Forecasting*, Vol. 21, pp. 651-662.
- Kay, S.M.; Marple, S.L.; (1981). Spectrum analysis- A modern perspective. En *Proceedings of the IEEE*, Vol. 69, pp. 1380-1419.
- Kaiser, R.; Maravall, A. (1999). Short-term and long-term trends, seasonal adjustment, and the business cycle. Banco de España, Documento de Trabajo n. 9918.
- Keynes, J. M. (1936). *The general theory of employment interest and money*. London: MacMillan.
- Harvey, A.C.; Trimbur, T.M. (2003). General Model-Based Filters for Extracting Cycles and Trends in Economic Time Series. *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 85, pp. 244-255.
- Hodrick, T.; Prescott, E. (1980). Post-war US business cycles: an empirical investigation. Carnegie Mellon University, manuscript. (1997). *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 29, pp. 1-16.
- Hou, M. (2005). Amplitude and frequency estimator of a sinusoid, *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 50, pp. 855-858.
- Hsu, L.; Ortega, R.; Damm, G; (1999). A globally convergent frequency estimator. *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 44, pp. 698-713.
- Stoica, P. (1993). List of references on spectral line analysis, *Signal Processing*, Vol. 31, pp. 329-340.
- Trapero Arenas, J.R.; Sira Ramírez, H; Feliu Batlle, V. (2007). An Algebraic frequency estimator for a biased and noisy sinusoidal signal. *Signal Processing*, Vol. 87, pp. 1188-1201.
- Young, P; Pedregal, D; (1999). Recursive and en-bloc approaches to signal extraction. *Journal of Applied Statistics*, Vol. 26, pp. 103-128.