

## **Un Modelo de Programación Matemática para un Problema de Secuenciación en la Industria del Mueble\***

**Adrián Toncovich<sup>1,2,3</sup>**

<sup>1</sup> Dpto. de Ingeniería de Diseño y Fabricación, Centro Politécnico Superior. Universidad de Zaragoza. C/ María de Luna 3, 50018. Zaragoza. toncovic@unizar.es.

<sup>2</sup> Grupo Decisión Multicriterio Zaragoza. Universidad de Zaragoza. C/ Gran Vía 2, 50005. Zaragoza.

<sup>3</sup> Dpto. de Ingeniería. Universidad Nacional del Sur. Avda. Alem 1253, 8000. Bahía Blanca, Argentina.

### **Resumen**

*Los problemas de planificación y programación de la producción que enfrentan en la actualidad las empresas están caracterizados por una gran complejidad que obliga a desarrollar herramientas adecuadas para poder proporcionar un servicio apropiado a los clientes, manteniendo en niveles aceptables los costes de producción y realizando un máximo aprovechamiento de las instalaciones productivas. En este caso se analiza un problema de secuenciación motivado por las actividades de una empresa dedicada a la fabricación de muebles orientados al público infantil y adolescente. Se recurre a un planteamiento de programación matemática multiobjetivo para modelizar el problema de secuenciación en un equipo productivo, que puede considerarse un caso de flowshop generalizado con preparaciones dependientes de la secuencia y restricciones adicionales de inventario. Para evaluar el comportamiento de la formulación se implementa dicho modelo en un software de optimización de propósito general. Los resultados de los experimentos efectuados indican que el planteamiento no resulta conveniente cuando el número de piezas que deben secuenciarse es relativamente grande. En consecuencia, para resolver el problema de forma adecuada deberían proponerse aproximaciones heurísticas alternativas que permitan obtener soluciones de calidad aceptable haciendo un uso razonable de los recursos computacionales disponibles.*

**Palabras clave:** Secuenciación, Producción, Programación Matemática Multiobjetivo.

### **1. Introducción**

En la actualidad, la constancia del cambio como factor determinante de la actividad de las empresas exige adaptaciones rápidas a las necesidades de los clientes para conseguir el éxito en el negocio. Además, en muchas pymes resulta difícil efectuar las inversiones implicadas en la adaptación de los entornos productivos, que permitirían disponer de estructuras flexibles, reactivas a los requerimientos del mercado. Por ende, la función de planificación y programación ejerce un rol esencial en el aseguramiento de niveles adecuados de servicio al cliente y la minimización de costes asociados a las operaciones (Palacios y otros, 2006).

Desde mediados del siglo pasado, la programación de la producción ha devenido en un tópico de investigación de gran interés, hecho que puede confirmarse por el número importante de

---

\* Trabajo parcialmente financiado mediante el proyecto de investigación PM034/2007 "E-participación, seguridad y democratización del conocimiento". Además, el autor desea agradecer a la Universidad de Zaragoza y el Banco Santander Central Hispano el apoyo dado en la forma de una beca de formación doctoral.

trabajos publicados sobre esta materia. En este sentido, los libros de Pinedo (1995) y Morton y Pentico (1993) constituyen excelentes tratados introductorios al campo de la teoría de la programación de la producción. Debido a que en gran parte de los casos reales resulta necesario considerar más de un objetivo en el proceso de toma de decisiones, toda metodología de programación de producción debería incorporar una estrategia multiobjetivo apropiada en el proceso de búsqueda de soluciones. Esta observación se encuentra apoyada por la publicación de una completa revisión de estado del arte en programación multicriterio presentada en T'kindt y Billaut (2002). La consideración de las preparaciones (*setups*) es otro tema importante en la investigación en programación de la producción como puede corroborarse a partir de la publicación del primer artículo compilatorio de Allavherdi y otros (1999), y de su reciente actualización (Allavherdi y otros, 2008), donde se citan más de 300 trabajos. Otro tema de interés, tiene que ver con las restricciones de espacio de almacenamiento existentes en los ambientes de fabricación. Esta temática aparece considerada en los trabajos de Luh y otros (1998), Brucker y otros (2006), y Wang y otros (2006) para diferentes casos de programación de la producción. Como ejemplos de aplicaciones de programación de la producción en la industria del mueble, se pueden citar los trabajos de Weintraub y otros (1999), que discute el desarrollo de procedimientos eficientes para la programación de trabajos en sistemas de gran tamaño, y de Naso y otros (2006), donde se proponen diferentes algoritmos para la coordinación de operaciones de producción en serie.

El problema considerado en este caso ha tenido su motivación en las actividades de una empresa familiar del entorno de Zaragoza, dedicada a la fabricación de muebles destinados al público infantil y juvenil. En los últimos años dicha empresa ha crecido de forma casi descontrolada, agravándose una situación física muy crítica debida al limitado espacio disponible para el desarrollo de sus operaciones y a la dificultad de realizar las inversiones necesarias para revertir esta situación. Los esfuerzos de programación en la instalación productiva se concentran en la mejora de las operaciones en un centro de mecanizado, que actúa como cuello de botella para el resto del proceso. La metodología empleada para abordar el problema está basada en un planteamiento de programación matemática multicriterio, que considera la estructura interna del centro de mecanizado, constituido a su vez por tres máquinas dispuestas en serie. En el análisis se han tenido en cuenta las preparaciones dependientes de la secuencia y la capacidad del *buffer* de alimentación. Las medidas de rendimiento utilizadas para evaluar la calidad de las secuencias incluyen el cumplimiento de las fechas de entrega y la maximización de la utilización de los recursos de producción. Para resolver la formulación resultante se utiliza un software general de optimización.

Seguidamente se presenta la estructura adoptada para el desarrollo del artículo. La Sección 2 define el problema motivador de este trabajo. En la Sección 3, se detallan las hipótesis adoptadas en el análisis, se propone un planteamiento matemático para representar el problema y se presenta una estrategia de solución inicial. La Sección 4 comenta los resultados del trabajo experimental realizado. Por último, la Sección 5 introduce las conclusiones del trabajo y las pautas para el desarrollo de ulteriores contribuciones en la materia.

## **2. Descripción del problema**

El proceso de producción en la empresa considerada, está constituido por dos etapas de producción principales que funcionan bajo estrategias diferenciadas. Se tiene, por un lado, una etapa de corte donde se obtienen piezas básicas rectangulares a partir de los tableros de melamina (materia prima del proceso). Por otro lado, en la siguiente etapa se mecanizan las piezas básicas para obtener las piezas finales que conforman el mueble terminado. El proceso

productivo se completa con otras operaciones de mecanizado menores, trabajos de pintura, ensamblado de partes, consolidación de cargas y expedición de órdenes de compra.

Esencialmente, el análisis se centra en el problema de programación de piezas en el centro de mecanizado. En esta oportunidad, el proceso de modelización ha tenido en cuenta la estructura interna de este recurso productivo, que está constituido por tres máquinas dispuestas en serie. Se tiene que el equipo bajo análisis recibe las piezas básicas almacenadas en un *buffer* de alimentación previo, que, a su vez, recibe las piezas provenientes de la sierra de corte. Esta zona de almacenamiento se utiliza también para organizar el conjunto de piezas con el fin de adaptar el flujo de material a un patrón conveniente para el centro de mecanizado. Además, el espacio asignado a este depósito es muy reducido e impone una restricción fuerte sobre el sistema. Por este motivo, resulta imperioso mantener un flujo estable de materiales entre las dos etapas de producción. Una vez que las piezas han sido procesadas en el centro de mecanizado, pueden enviarse a otros equipos o ir directamente a un área de almacenamiento de piezas terminadas. Por otra parte, el cambio de tipo de pieza en el centro de mecanizado implica un tiempo considerable de preparación y ajuste de las máquinas, que depende de la secuencia adoptada en cada una de éstas.

En concreto, la segunda fase del proceso productivo tiene como principal objetivo conseguir que se minimicen los tiempos y costes de preparación, generados cada vez que hay un cambio en el tipo de pieza en alguna de las máquinas. La maximización de medidas de utilización del recurso, tales como el tiempo de finalización de todos los trabajos (*makespan*), facilita un control indirecto de los tiempos de preparación. Otras medidas de rendimiento que se consideran en el proceso de planificación incluyen: la minimización del número de piezas entregadas fuera de término, la minimización del tiempo total de demora, la minimización del número de piezas finalizados antes de las fechas previstas y la minimización del tiempo total de adelanto. Estos objetivos, asociados a las fechas de entrega, suelen adoptarse para evaluar el rendimiento de los sistemas de producción *just-in-time* (T'kindt y Billaut, 2002).

Con el objetivo de definir el alcance del trabajo realizado, resulta necesario remarcar que el principal desafío de planificación en la empresa considerada está suscitado por la secuenciación de piezas en el centro de mecanizado. Por consiguiente, el resto del proceso productivo introduce restricciones adicionales, que obligan a buscar una solución de compromiso, compensadora de requerimientos internos y externos, para definir el programa de producción en dicho recurso productivo.

### **3. Metodología de solución**

Esta sección describe el problema utilizando lenguaje un matemático y presenta una primera estrategia de solución basada en esta descripción formal. El problema se ha modelizado mediante una aproximación de programación matemática multicriterio y la formulación obtenida se ha resuelto utilizando un *software* de optimización general. El modelo se basa, en parte, en el planteamiento introducido por Choobineh y otros (2006), que ha sido convenientemente ajustado considerando los atributos del problema en estudio.

Las medidas de rendimiento utilizadas valoran la utilización de los recursos y el nivel de servicio al cliente. Para calcular el aprovechamiento de los recursos de producción se emplea el tiempo de terminación de todas las operaciones de todos los trabajos. Por otro lado, para medir el nivel de servicio al cliente se recurre a medidas basadas en las fechas de entrega acordadas con los clientes. Así mismo, la minimización del inventario de producto terminado puede conseguirse a través de un riguroso cumplimiento de las fechas de entrega previstas. En

la práctica, el número de trabajos retrasados se considera una medida representativa de la calidad del servicio proporcionado a los clientes. No obstante, la misma no tiene en cuenta la magnitud de la demora asociada con cada trabajo. En consecuencia, una medida temporal tal como el retraso total proporciona de mejor forma la verificación de las fechas de entrega y del nivel del servicio al cliente. De modo similar, las piezas terminadas antes de tiempo producen una acumulación de inventario de producto terminado que repercute negativamente sobre los costes de producción. Por lo tanto, para considerar de manera más adecuada este objetivo resulta necesario introducir otros dos objetivos subordinados entre sí: la minimización del número de trabajos adelantados y la minimización del adelanto total.

Las suposiciones efectuadas en el análisis se detallan seguidamente. Las piezas rectangulares básicas llegan, provenientes de la sierra de corte, al *buffer* de alimentación, en tiempos variables a partir del instante  $t = 0$ , y son almacenadas allí hasta que se inicia su procesamiento en el centro de mecanizado. El centro de mecanizado está constituido por  $l$  máquinas colocadas en serie. No necesariamente todos los trabajos deben ser procesados en todas las máquinas, aunque la secuencia puede considerarse equivalente para todas las piezas (teniendo en cuenta que el tiempo de proceso es nulo para las máquinas donde no se realiza ninguna operación). Los tiempos de proceso, las fechas de entrega previstas, los tiempos de llegada y demás parámetros del sistema son conocidos en el instante inicial,  $t = 0$ . Cada pieza se procesa en cada máquina una única vez como máximo, sin interrupciones, y no existe prioridad de procesamiento entre piezas en cada máquina. El tiempo de preparación requerido por cada pieza en cada máquina depende de la pieza que fue procesada inmediatamente antes en dicha máquina, pero es independiente de la posición de la pieza dentro de la secuencia.

Los parámetros del modelo se definen de la siguiente manera:

- $p_{jl}$ : Tiempo de proceso de la pieza  $j$  en la máquina  $l$  ( $p_{jl} \geq 0$ ),  $j = 1, \dots, n$ ,  $l = 1, \dots, m$ .
- $r_j$ : Tiempo de llegada de la pieza  $j$  ( $r_j \geq 0$ ),  $j = 1, \dots, n$ .
- $d_j$ : Fecha de entrega prevista de la pieza  $j$  ( $d_j > 0$ ),  $j = 1, \dots, n$ .
- $v_j$ : Volumen de la pieza  $j$  ( $v_j > 0$ ),  $j = 1, \dots, n$ .
- $s_{0jl}$ : Tiempo de preparación de la pieza  $j$  cuando esta se asigna a la primera posición de la secuencia en la máquina  $l$  ( $s_{0jl} \geq 0$ ),  $j = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, n_l$ ,  $l = 1, \dots, m$ .
- $s_{ijl}$ : Tiempo de preparación relacionado con el cambio de la pieza  $i$  a la pieza  $j$  en la máquina  $l$  ( $s_{ijl} \geq 0$ ),  $i$  y  $j = 1, \dots, n$ ,  $i \neq j$ ,  $l = 1, \dots, m$ .
- $n_l$ : Número de piezas que deben procesarse en la máquina  $l$ ,  $l = 1, \dots, m$ .
- $y_j$ : Número de operaciones que deben realizarse en la pieza  $j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .
- $V$ : Capacidad volumétrica del *buffer* de alimentación.
- $M$ : Un número muy grande; desde un punto de vista computacional este número debe adoptar el menor valor posible que pueda considerarse muy grande, y será distinto, en general, para cada restricción en la que aparece.
- $\varepsilon$ : Un número positivo muy pequeño; cabe realizar una consideración similar a la efectuada para el parámetro  $M$ .

$$A_{jot} : \begin{cases} 1 & \text{si la operación } o \text{ de la pieza } j \text{ debe procesarse en la máquina } l, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

$$G_{ij} : \begin{cases} 1 & \text{si la pieza } i \text{ ha llegado antes o al mismo tiempo que la pieza } j (r_i \leq r_j), \\ 0 & \text{en cualquier otro caso } (r_i > r_j). \end{cases}$$

Las variables de decisión del problema se describen a continuación (para  $i, j$  y  $k = 1, \dots, n$ ,  $l = 1, \dots, m$ , y  $o = 1, 2, \dots, y_j$ ):

$P_{kl}$ : Tiempo de proceso de la operación en la posición  $k$  de la secuencia en la máquina  $l$ .

$S_{kl}$ : Tiempo de preparación de la operación asignada a la posición  $k$  en la máquina  $l$ .

$B_{kl}$ : Tiempo de inicio de la operación en el lugar  $k$  de la secuencia en la máquina  $l$ .

$B_j$ : Tiempo de inicio de la primera operación de la pieza  $j$ .

$C_{kl}$ : Tiempo de finalización de la operación en la posición  $k$  de la secuencia en la máquina  $l$ .

$C_j$ : Tiempo de terminación de la última operación de la pieza  $j$ .

$T_j$ : Retraso de la pieza  $j$  con respecto a su fecha de entrega prevista.

$F_j$ : Adelanto de la pieza  $j$  con respecto a su fecha de entrega prevista.

$$X_{jkl} : \begin{cases} 1 & \text{si la pieza } j \text{ se asigna a la posición } k \text{ de la secuencia en la máquina } l, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

$$U_{ijkl} : \begin{cases} 1 & \text{si la pieza } j \text{ se asigna a la posición } k \text{ de la secuencia y está precedida} \\ & \text{por la pieza } i \text{ en la máquina } l, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

$$L_j : \begin{cases} 1 & \text{si la pieza } j \text{ está retrasada con respecto a su fecha de entrega,} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

$$E_j : \begin{cases} 1 & \text{si la pieza } j \text{ está adelantada con respecto a su fecha de entrega,} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

$$H_{ji} : \begin{cases} 1 & \text{si la pieza } i \text{ se ha comenzado a procesar antes del arribo de la pieza } j, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Seguidamente se introduce el modelo de programación matemática para el problema:

$$\text{minimizar } \left\{ Z_1 = \max_{j=1}^n \{C_j\}, Z_2 = \sum_{j=1}^n L_j, Z_3 = \sum_{j=1}^n T_j, Z_4 = \sum_{j=1}^n E_j, Z_5 = \sum_{j=1}^n F_j \right\} \quad (14)$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^n X_{jkl} = 1 \quad k = 1, \dots, n_l \text{ y } l = 1, \dots, m, \quad (15)$$

$$\sum_{k=1}^{n_l} X_{jkl} = \sum_{o=1}^{y_j} A_{jol} \quad j = 1, \dots, n \quad y l = 1, \dots, m, \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ijkl} = 1 \quad k = 2, \dots, n_l \quad y l = 1, \dots, m, \quad (17)$$

$$X_{jkl} + X_{i(k-1)l} - 1 \leq U_{ijkl} \quad i \quad y j = 1, \dots, n, (i \neq j), k = 2, \dots, n_l \quad y l = 1, \dots, m, \quad (18)$$

$$S_{ll} = \sum_{j=1}^n s_{0jl} X_{jll} \quad l = 1, \dots, m, \quad (19)$$

$$S_{kl} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ijl} U_{ijkl} \quad k = 2, \dots, n_l \quad y l = 1, \dots, m, \quad (20)$$

$$P_{kl} = \sum_{j=1}^n X_{jkl} P_{jl} \quad k = 1, \dots, n_l \quad y l = 1, \dots, m, \quad (21)$$

$$B_j \geq B_{kl} - M(1 - X_{jkl}) \quad j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n_l \quad y l \ni A_{jll} = 1, \quad (22)$$

$$B_j \leq B_{kl} + M(1 - X_{jkl}) \quad j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n_l \quad y l \ni A_{jll} = 1, \quad (23)$$

$$C_{kl} = B_{kl} + S_{kl} + P_{kl} \quad k = 1, \dots, n_l \quad y l = 1, \dots, m, \quad (24)$$

$$C_j \geq C_{kl} - M(1 - X_{jkl}) \quad j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n_l \quad y l \ni A_{jy,l} = 1, \quad (25)$$

$$C_j \leq C_{kl} + M(1 - X_{jkl}) \quad j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n_l \quad y l \ni A_{jy,l} = 1, \quad (26)$$

$$B_j \geq r_j \quad j = 1, \dots, n, \quad (27)$$

$$B_{kl} \geq C_{(k-1)l} \quad k = 2, \dots, n_l \quad y l = 1, \dots, m, \quad (28)$$

$$B_{kl} + M(1 - X_{jkl}) \geq C_{pq} - M(1 - X_{jpq}) \quad j = 1, \dots, n, o = 2, \dots, y_j, l \ni A_{jol} = 1, \\ q \ni A_{j(o-1)q} = 1, k = 1, \dots, n_l \quad y r = 1, \dots, n_q, \quad (29)$$

$$-C_j + d_j \leq M(1 - L_j) \quad j = 1, \dots, n, \quad (30)$$

$$C_j - d_j \leq ML_j \quad j = 1, \dots, n, \quad (31)$$

$$C_j - d_j \leq M(1 - E_j) \quad j = 1, \dots, n, \quad (32)$$

$$-C_j + d_j \leq ME_j \quad j = 1, \dots, n, \quad (33)$$

$$T_j \geq C_j - d_j \quad j = 1, \dots, n, \quad (34)$$

$$F_j \geq d_j - C_j \quad j = 1, \dots, n, \quad (35)$$

$$-r_j + B_i \leq M(1 - H_{ji}) \quad i = 1, \dots, n \quad y j = 1, \dots, n, \quad (36)$$

$$r_j - B_i \leq MH_{ji} - \varepsilon \quad i = 1, \dots, n \text{ y } j = 1, \dots, n, \quad (37)$$

$$\sum_{i=1}^n v_i G_{ij} - \sum_{i=1}^n v_i H_{ji} \leq V \quad j = 1, \dots, n, \quad (38)$$

$$L_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n, \quad E_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n, \quad (39)$$

$$X_{jkl} \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n \text{ y } l = 1, \dots, m, \quad (40)$$

$$U_{ijkl} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n_l \text{ y } l = 1, \dots, m, \quad (41)$$

$$H_{ji} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n \text{ y } j = 1, \dots, n, \quad (42)$$

$$T_j \geq 0, F_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n. \quad (43)$$

La expresión (1) introduce las funciones objetivo del problema: minimización del tiempo de terminación de la última pieza que sale del sistema (*makespan*), minimización del número de piezas retrasadas, minimización del retraso total del conjunto de piezas procesadas, minimización del número de piezas adelantadas y minimización del adelanto total.

Las ecuaciones (2) y (3) exigen, por un lado, que, en cada máquina, solamente una operación de una pieza sea asignada a cada posición de la secuencia, y, por el otro, que se asigne una única posición de la secuencia en cada máquina a cada una de las operaciones de las piezas que deben procesarse en esa máquina. Las expresiones (4) y (5) aseguran que solamente una pieza, la  $j$ , se coloca después de la pieza  $i$  cuando esta se ha asignado a la posición  $k-l$  de la secuencia en la máquina  $l$ .

Las expresiones (6) y (7) determinan los tiempos de preparación para la primera posición de la secuencia y las posiciones subsecuentes en la máquina  $l$ . El tiempo de procesamiento de la pieza situada en la posición  $k$  de la secuencia en la máquina  $l$  viene dado por la ecuación (8). El inicio de la primera operación sobre la pieza  $j$  se calcula mediante las expresiones (9) y (10). A partir de la igualdad (11) se obtiene el tiempo de terminación de la operación asignada a la posición  $k$  de la secuencia en la máquina  $l$ . El tiempo de terminación de la última operación de la pieza  $j$  se obtiene a partir de las ecuaciones (12) y (13). La desigualdad (14) restringe el comienzo de la primera operación de la pieza  $j$  a ser mayor o igual que su tiempo de llegada. Por otro lado, el inicio de la operación asignada a la posición  $k$  de la secuencia en la máquina  $l$  debe ser mayor o igual que el tiempo de terminación de la operación previa de la secuencia en la misma máquina (15). La ecuación (16) requiere que el comienzo de la operación  $o$  de la pieza  $j$  en la máquina  $l$  sea mayor o igual que el tiempo de terminación de la operación previa realizada sobre la misma pieza.

Las desigualdades (17) y (18) se introducen con el fin de determinar si la pieza  $j$  está retrasada con respecto a su fecha de entrega. De igual forma, las dos desigualdades (19) y (20) se emplean para establecer si la pieza en consideración está adelantada. El cómputo del retraso y el adelanto de la pieza  $j$  se realiza por medio de las expresiones (21) y (22), respectivamente. Las ecuaciones (23) y (24) permiten determinar si la pieza  $i$  ha comenzado a ser procesada antes de la llegada de la pieza  $j$ . La limitación en el valor de la capacidad del *buffer* de alimentación queda explicitada por medio de la restricción (25).

Las expresiones (26) y (27) introducen las restricciones que definen las variables binarias del modelo. Por último, se incluyen las restricciones que exigen la no negatividad de las variables asociadas a los retrasos y los adelantos (28).

Puede advertirse que, en la formulación resultante, se utilizan expresiones equivalentes [(2)-(5)] a las empleadas para formular el problema del viajante de comercio (*Traveling Salesman Problem*, TSP). En este caso se debe resolver un problema de este tipo para cada una de las máquinas y se tiene que el tiempo de preparación asociado al cambio de una pieza a la siguiente es análogo a la distancia entre ciudades del TSP.

Por otra parte, debe incorporarse en el planteamiento una estrategia multiobjetivo apropiada que permita encontrar una solución de compromiso capaz de minimizar la desviación relativa global respecto de los valores óptimos considerados de forma conjunta. Una de las aproximaciones utilizadas con mayor frecuencia consiste en considerar una función objetivo construida como la suma de las diferencias ponderadas y normalizadas respecto de los valores óptimos individuales. Para el caso considerado, suponiendo que se ha establecido un conjunto de pesos relativos  $W_1, \dots, W_5$  para los objetivos  $Z_1, \dots, Z_5$ , la función objetivo resultante puede expresarse de la siguiente forma:

$$\text{minimizar } Z = \sum_{i=1}^5 W_i \frac{Z_i - Z_i^*}{Z_i^*}, \quad (44)$$

siendo  $Z_i^*$  el valor óptimo del objetivo cuando  $Z_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  es el único objetivo considerado.

La formulación presentada fue implementada mediante el *software* de programación matemática LINGO (Extended LINGO version, release 8.0) en un ordenador con un procesador de 3,2 GHz y 1 GB de memoria RAM.

#### 4. Resultados experimentales

Con el fin de estudiar el comportamiento del modelo propuesto se realizaron diversos experimentos. Se empleó un conjunto de problemas de dimensiones reducidas debido a que, para problemas de mayores dimensiones, los tiempos de cómputo resultaban excesivamente grandes. Este conjunto de problemas fue generado de forma aleatoria, para contar con una base de casos sobre la que se pudiera realizar un análisis de utilidad.

En los problemas resueltos se han considerado pesos relativos iguales ( $W_i = 0,2$ ,  $i = 1, \dots, 5$ ). A continuación se presenta un ejemplo para ilustrar el uso de la metodología en un problema concreto. La Tabla 1 muestra la información asociada al ejemplo. La capacidad del buffer de alimentación se ha establecido en 20 unidades. Las Figuras 1, 2 y 3 muestran los diagramas de Gantt correspondientes las secuencias óptimas para dos de los objetivos individuales y para la función multiobjetivo. En las figuras, la porción rayada de las barras corresponde al tiempo de preparación de cada pieza en cada máquina.

Con el fin de poder resolver problemas de mayor dimensión deberían proponerse variantes de modelización apropiadas y aplicar software más potente, empleando las estrategias algorítmicas más adecuadas. Como siguientes pasos podrían plantearse aproximaciones heurísticas basadas en técnicas de relajación lagrangiana, aprovechando la formulación matemática presentada, en búsqueda local o en métodos basados en poblaciones.

**Tabla 31.** Valores de los parámetros del ejemplo

$S_{ijl}$																			
		1						2						3					
$j$		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
$i$	1	0	5	0	5	2	3	0	0	3	4	6	4	0	0	0	0	0	0
	2	4	0	0	6	3	5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	8	4	1
	3	0	0	0	0	0	0	8	0	0	5	9	7	0	4	0	4	3	2
	4	5	1	0	0	2	8	3	0	2	0	8	3	0	1	4	0	3	1
		5	3	4	0	6	0	3	6	0	2	1	0	2	0	3	2	8	0
		6	4	5	0	3	5	0	3	0	3	8	2	0	0	8	7	4	

		$j$					
$l$		1	2	3	4	5	6
$A_{j0l}$	1	1	1	0	0	1	0
	2	0	1	0	0	0	1
	3	0	0	0	0	0	0

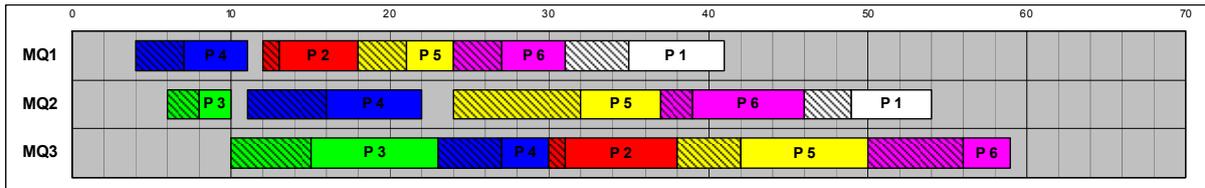
		$j$					
$R_i$		7	12	6	4	9	5
$D_i$		25	34	26	27	35	29

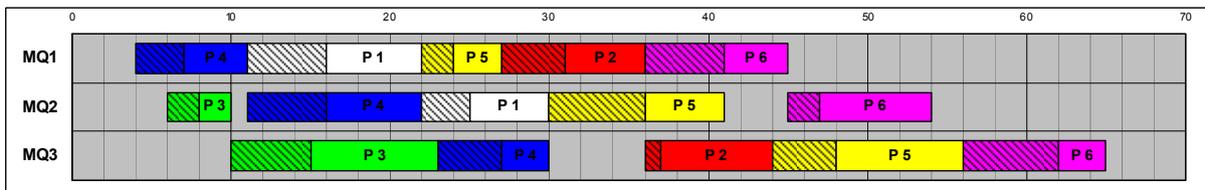
		$j$					
$l$		1	2	3	4	5	6
$P_{jl}$	1	6	5	0	4	3	4
	3	0	7	8	3	8	3

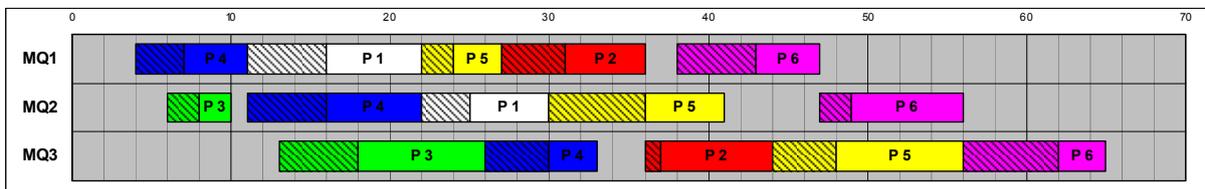
		$j$					
$l$		1	2	3	4	5	6
$S_{0jl}$	1	5	4	0	3	6	6
	2	9	0	2	4	3	5
$V_j$		5	5	2	6	7	6



**Figura 17.** Secuencia óptima para el objetivo *makespan*



**Figura 18.** Secuencia óptima para el objetivo retraso total



**Figura 19.** Secuencia óptima para el problema multiobjetivo

## 5. Conclusiones

En este trabajo, se ha analizado un problema de secuenciación que tiene su motivación en el sistema de producción de un fabricante de muebles. El problema fue modelado utilizando una aproximación de programación matemática, implementada mediante un *software* de optimización de propósito general. El uso de esta estrategia para resolver el problema considerado resulta razonable cuando la dimensión de los casos es relativamente pequeña. Sin embargo, para problemas de mayor tamaño, los resultados de los experimentos indican que la aproximación exacta no resulta práctica porque los tiempos de cómputo crecen de forma exponencial. En consecuencia, una vez agotadas las posibilidades de mejora del modelo de programación matemática, debería recurrirse a procedimientos heurísticos que permitan generar buenas soluciones utilizando un esfuerzo computacional razonable. El diseño de estrategias alternativas aproximadas debería ayudar a obtener resultados adecuados en tiempos razonables, en general, en detrimento de la calidad de las soluciones generadas.

Las contribuciones futuras podrían basarse en la utilización de otras estrategias multicriterio, tales como la programación por metas o la generación del conjunto de soluciones no dominadas del problema (optimización de Pareto), y la consideración de otras restricciones existentes en los entornos de fabricación, como por ejemplo el bloqueo de máquina o la capacidad limitada de las zonas de almacenamiento dispuestas entre las máquinas del sistema.

## Referencias

Allahverdi, A.; Gupta, J.N.D.; Aldowaisan, T. (1999). A Review of Scheduling Research Involving Setup Consideration. *Omega*, Vol. 27, No. 2, pp. 219-239.

Allahverdi, A.; Ng, C.T.; Cheng, T.C.E.; Kovalyov, M.Y. (2008). A Survey of Scheduling Problems with Setup Times or Costs. *European Journal of Operational Research*, Vol. 187, No. 3, pp. 985-1032.

Brucker, P.; Heitmann, S.; Hurink, J.; Nieberg, T. (2006). Job-Shop Scheduling with Limited Capacity Buffers. *OR Spectrum*, Vol. 28, No. 2, pp. 151-176.

Choobineh, F.F.; Mohebbi, E.; Khoo, H. (2006). A Multi-Objective Tabu Search for a Single-Machine Scheduling Problem with sequence-dependent setup times. *European Journal of Operational Research*, Vol. 175, No. 1, pp. 318-337.

Luh, P.B.; Gou, L.; Zhang, Y.H.; Nagahora, T.; Tsuji, M.; Yoneda, K.; Hasegawa, T.; Kyoya, Y.; Kano, T. (1998). Job Shop Scheduling with Group-Dependent Setups, Finite Buffers, and Long Time Horizon. *Annals of Operations Research*, Vol. 76, pp. 233-259.

Morton, T.E.; Pentico, D.W. (1993). *Heuristic Scheduling Systems, with Application to Production Systems and Project Management*. John Wiley & Sons.

Naso, D.; Turchiano, B.; Meloni, C. (2006). Single and Multi-Objective Evolutionary Algorithms for the Coordination of Serial Manufacturing Operations. *Journal of Intelligent Manufacturing*, Vol. 17, No. 2, pp. 251-270.

Palacios, M.C.; Álvarez, E.; Álvarez, M.; Santamaría J.M. (2006). Lessons Learned for Building Agile and Flexible Scheduling Tool for Turbulent Environments in the Extended Enterprise. *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, Vol. 22, No. 5-6, pp. 485-492.

Pinedo, M. (1995). *Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems*. Prentice-Hall.

T'kindt, V.; Billaut, J.-C. (2002). *Multicriteria Scheduling: Theory, Models and Algorithms*. Springer.

Wang, L.; Zhang, L.; Zheng, D.Z. (2006). An Effective Hybrid Genetic Algorithm for Flow Shop Scheduling with Limited Buffers. *Computers & Operations Research*, Vol. 33, No. 10, pp. 2960-2971.

Weintraub, A.; Cormier, D.; Hodgson, T.; King, R.; Wilson, J.; Zozom, A. (1999). Scheduling with Alternatives: a Link between Process Planning and Scheduling. *IIE Transactions*, Vol. 31, No. 11, pp. 1093-1102.