II International Conference on Industrial Engineering and Industrial Management
XII Congreso de Ingeniería de Organización
September 3-5, 2008, Burgos, Spain

Modelo de sistema de inventario con premio por emisión de pedidos

Frederic Marimon[1], Martí Casadesús[2]

1 Dpto. de Organización de Empresas. Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. Universidad Internacional de Catalunya. Calle Inmaculada, 22 08017 Barcelona. fmarimon@cir.uic.es
2 Dpto. de Organización, Gestión Empresarial y Diseño del Producto. Escuela Politécnica. Universidad de Girona. Campus Montilivi, 17071 Girona. marti.casadesus@udg.edu

Resumen

Este trabajo es una revisión del modelo de inventario básico de cantidad fija en el caso en el que el propietario del stock reciba un premio o bonus cada vez que reaprovisiona.
El modelo original de Harris y Wilson tiene en cuenta el coste de emisión de pedido y el coste de almacenamiento, sin embargo, en las modernas cadenas logísticas se da el caso en el que el proveedor está dispuesto a premiar al cliente cada vez que reaprovisiona. En el trabajo se cuantifica la cantidad que estaría dispuesto a pagar dicho. Esta cantidad la comparará con el beneficio obtenido en varios conceptos (a veces intangibles) como por ejemplo el mayor conocimiento de las transacciones de la cadena logística.

Palabras clave: Sistema de inventario; costes de inventarios.

1. Introducción

A principios del siglo pasado se empezaron a desarrollar los primeros modelos de sistemas de inventarios. Su objetivo era la optimización de costes de gestión de inventarios. Harris (1913) desarrolló uno de estos modelos pioneros que gozó de gran popularidad. Este primer modelo y otras extensiones se recogen en el libro “Quantity and Economy in Manufacture” publicado por Raymond en 1931. El modelo fue difundido por Wilson (1934). Años más tarde, Whitin realizó unas revisiones importantes en “The Theory of Inventory Management” y en “Inventory control research: A survey”, publicados en 1953 y 1954 respectivamente.

Desde entonces han aparecido un gran número de propuestas para atender situaciones especiales. En efecto, en la medida en que han aparecido nuevas estrategias en la cadena logística, se han desarrollado modelos *ad hoc* para estas nuevas situaciones. Paralelamente ha surgido un amplio debate sobre las ventajas e inconvenientes de estos sistemas (Noblitt, 2001). La mayor parte de estos modelos optimizan la función coste, utilizando diversos algoritmos y bajo distintos supuestos. De hecho, el modelo básico de la cantidad económica de pedido (economic order quantity –EOQ-) minimiza los costes totales de lanzamiento y de almacenamiento (Heizer y Render, 2007).

Sin embargo, no se conoce ninguna adaptación del primitivo modelo de Harris cuando el agente que posee el stock recibe un premio o *bonus* cada vez que hay reaprovisionamiento. Es un concepto simétrico al coste de lanzamiento; un coste de lanzamiento con signo negativo.

Esta situación se da cuando el proveedor premia a su cliente cada vez que recibe un pedido; es decir, cada vez que reaprovisiona. Es el caso en el que el proveedor obtiene un beneficio cuando gestiona los reaprovisionamientos de sus clientes. Una razón para ello es tener el control del flujo de material a lo largo de la cadena logística, para hacer una buena programación de su plan de producción, por ejemplo.

2. El modelo básico de la cantidad económica de prdido (economic order quantity model –EOQ–)

El modelo básico de Harris supone que la gestión del inventario y sus costes corren a cargo del comprador. El modelo contempla los siguientes parámetros:

- **D Demanda anual**
- **e Coste de emisión o lanzamiento de un pedido**
- **i Coste de mantenimiento (medido como porcentaje del nivel medio de stocks)**
- **v Coste de adquisición unitario.**

En su versión más sencilla, sólo analiza dos tipos de costes: los de mantenimiento y los de emisión. La función de costes total anual en función del tamaño de lote es:

$$C_{total} = C_{mantenimiento} + C_{emisión} = \frac{Q}{2} vi + \frac{D}{Q} e \qquad (1)$$

Se desea conocer cuál es el tamaño de lote de compra que minimiza esa expresión. Teniendo en cuenta la condición de primer orden (que la primera derivada sea nula), se obtiene que el tamaño de lote óptimo es:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2De}{iv}} \qquad (2)$$

El siguiente gráfico (figura 1) muestra el comportamiento de estos costes en función del tamaño del lote.

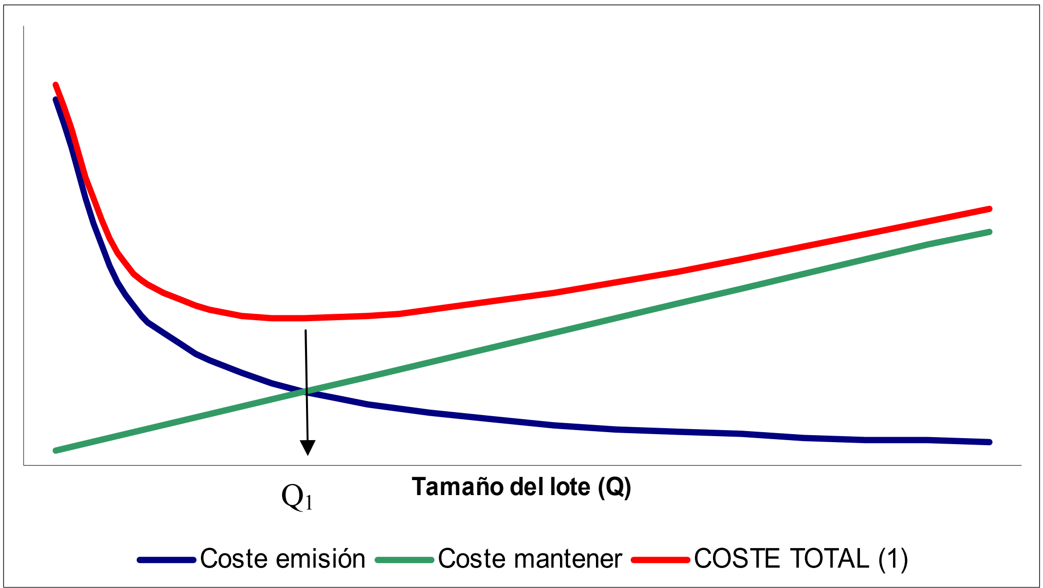

Figura 1. Costes de gestión de inventarios en función del tamaño de lote. Modelo de cantidad fija de Harris.

Siguiendo este modelo, el coste total anual (mantenimiento más lanzamiento) utilizando un tamaño de pedido Q_1 es:

$$C_{total\,1} = \sqrt{2Deiv} \qquad (3)$$

Se observa además que cuando se utiliza el lote económico, los costes de mantenimiento y de lanzamiento son iguales.

3. Modelo sin coste de emisión.

El modelo propuesto aquí es el caso en que el comprador no tiene gastos de emisión. En el siguiente apartado analizaremos el caso en que el comprador obtenga un *bonus* por cada reposición. En ambos casos el proveedor asume el coste de lanzamiento de su cliente. Obviamente, esto lo hará cuando obtenga un beneficio al realizar la reposición y la gestión de la emisión de los pedidos que le llegan de su cliente. En efecto, el proveedor puede tener interés en estar físicamente en las instalaciones del cliente para conocer de primera mano como evoluciona la venta del producto, cómo está situado físicamente, o incluso obtener información acerca de productos competitivos.

En este apartado consideramos que la gestión de aprovisionamiento físico corre a cargo del proveedor. En esta situación el comprador sólo asume los costes de mantenimiento del inventario y por tanto le favorece minimizar el stock medio, es decir, hacer un reaprovisionamiento muy frecuente y de pequeñas cantidades. Por otra parte, al proveedor le interesará minimizar sus costes de aprovisionamiento, y por tanto intentará maximizar el tamaño del lote. Proveedor y comprador pueden negociar un tamaño de lote en el que el comprador soporte el mismo coste total que tenía en la situación en la que asumiera tanto el mantenimiento como el lanzamiento ($C_{total\,1}$).

En este caso, el comprador podría aceptar un tamaño de lote $Q_2 = 2Q_1$ (ver figura 2).

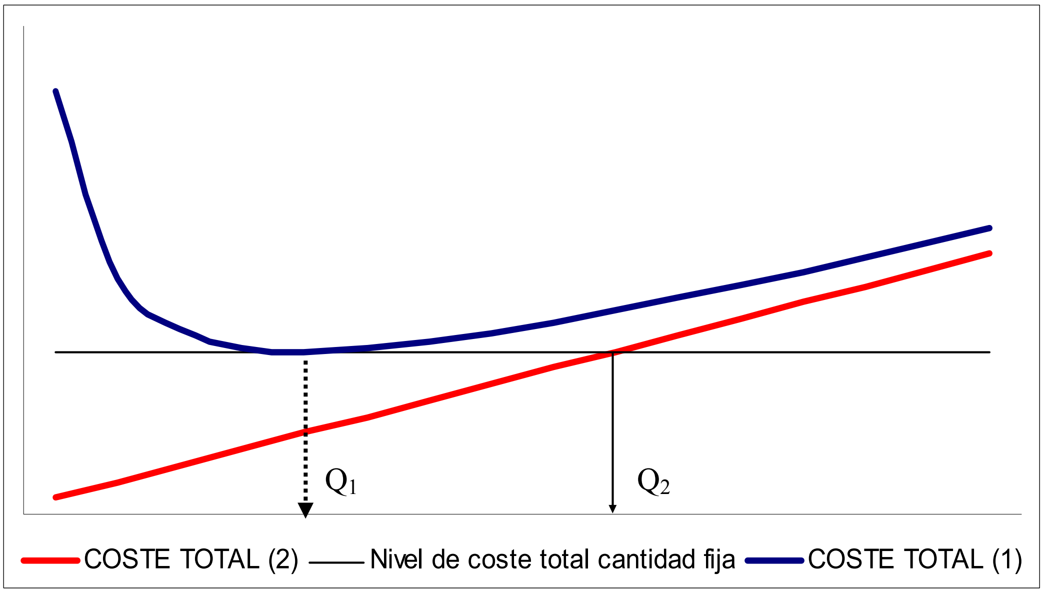

Figura 2. Costes de gestión de inventarios en función del tamaño de lote. Modelo en el que el comprador no asume los gastos de emisión.

4. Modelo con premio por reposición. Caso particular en el que el premio es de cantidad *e*.

Vamos ahora a suponer que en realidad, el comprador recibe un premio por cada reposición. Bien directamente de su proveedor, o bien porque el propio mercado premia la renovación de producto. Supondremos que el *bonus* es precisamente de cantidad *e*. Vendría a ser un concepto simétrico al coste de emisión de pedido o un coste de emisión negativo. En este caso, al coste de mantener habría que restarle ese premio proporcional al número de reposiciones. En este caso, el grafo de coste total es el siguiente:

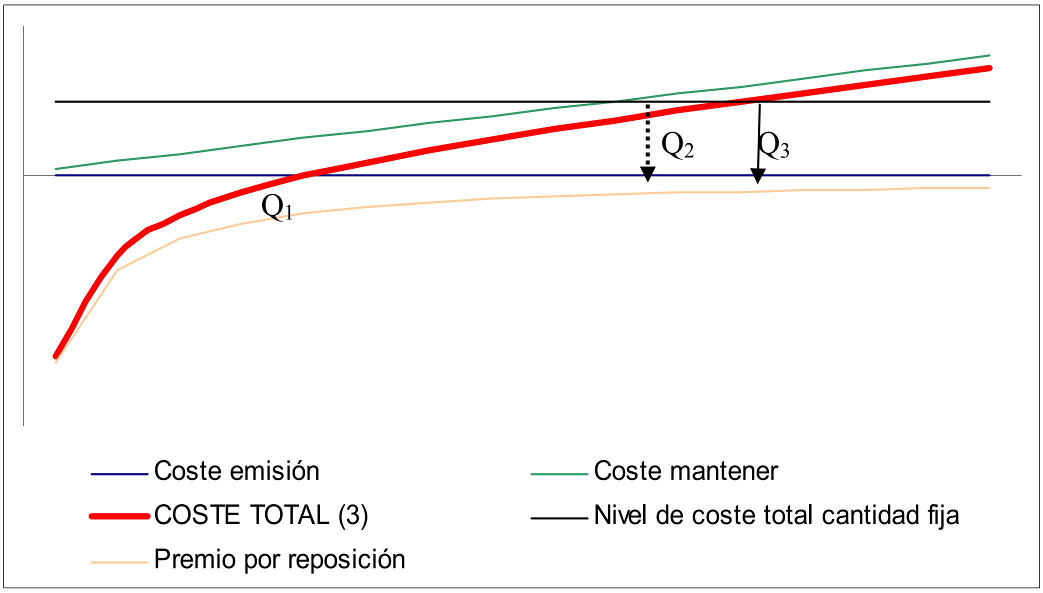

Figura 3. Costes de gestión de inventarios en función del tamaño de lote. Modelo en el que el comprador obtiene un premio por cada reposición.

El comprador podría comparar esta situación con la inicial. Suponemos otra vez que está dispuesto a soportar unos costes iguales a la situación primera. Esto se consigue con una política de reaprovisionamiento con un tamaño de lote:

$$Q_3 = \left(1+\sqrt{2}\right)Q_1 \qquad (4)$$

En efecto, esta cantidad es la que hace que el coste de mantenimiento menos el premio por reposiciones sea igual a $C_{total\ 1}$.

$$C_{total\ 3} = C_{mant} - Premio = \frac{Q}{2}iv - \frac{D}{Q}e \qquad (5)$$

La expresión Q_3 es la que hace que este coste sea $(2Deiv)^{1/2}$ (ver anexo 1).

En esta situación, el comprador estaría dispuesto a aceptar un tamaño de lote 2,41 veces el tamaño de lote económico que resulta de las condiciones iniciales.

5. Modelo con coste de emisión *e* y premio por reposición *b* (siendo *b* < *e*)

Este es un caso más general, en el que el comprador asume los costes de emisión (*e*) y al mismo tiempo obtiene un *bonus* por pedido (*b*). Hay dos posibilidades que vamos a estudiar separadamente: que el *bonus* sea superior al coste o viceversa. En este apartado suponemos que el premio o *bonus* es inferior al coste, por tanto, el efecto conjunto de *bonus* y coste viene a ser un coste equivalente de cantidad (*e*-*b*). En el siguiente apartado estudiaremos el caso contrario. Como se observa en la figura 4, la simetría del coste total es del mismo tipo que en el modelo inicial de Harris. El comprador estaría dispuesto a tomar un lote de tamaño tal que los costes derivados de esa política fueran los mismos que soportaba en la situación descrita por el modelo básico EOQ en el apartado 2. La gráfica muestra dos soluciones, que son:

$$Q_4^a = Q_1 + \sqrt{\frac{2Db}{iv}} \qquad (6)$$

$$Q_4^b = Q_1 - \sqrt{\frac{2Db}{iv}} \qquad (7)$$

En efecto, estos dos tamaños de lote satisfacen la siguiente expresión

$$C_{total\ 4} = C_{mantener} + C_{emisión} - B_{emisión} \qquad (8)$$

donde $B_{emisión}$ es el *bonus* anual obtenido como sumatoria de los premios de cada pedido realizado. El coste total se iguala a $(2Deiv)^{½}$ (ver anexo 2) para garantizar que el comprador estará en la misma situación que en la descrita en el modelo EOQ en el apartado 2.

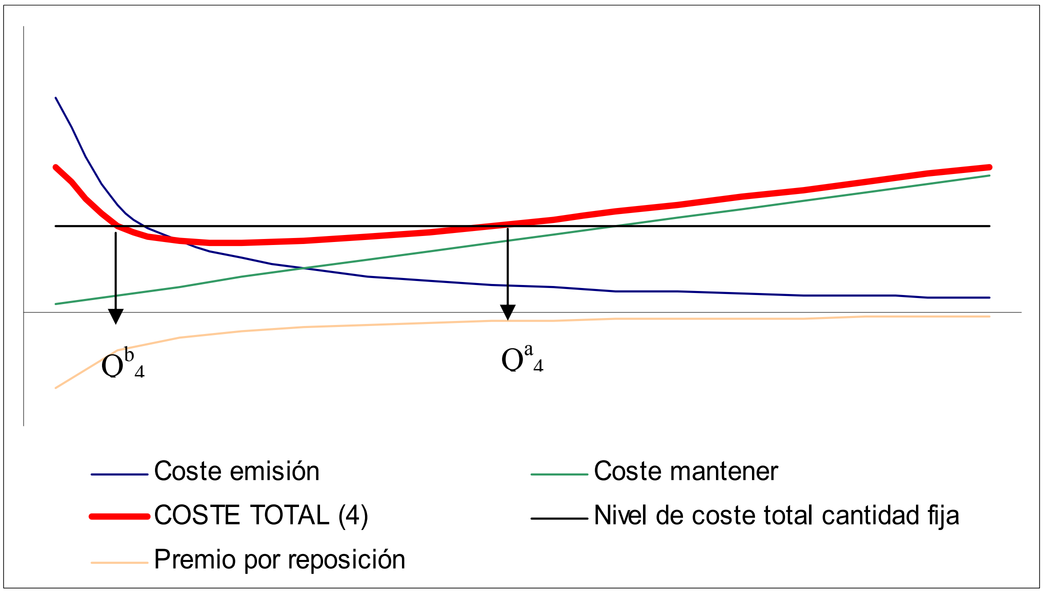

Figura 4. Costes de gestión de inventarios en función del tamaño de lote. Modelo en el que el comprador soporta el coste de emisión (*e*) y además obtiene un premio por cada reposición (*b*): caso en que *b*<*e*

Las dos soluciones son reales, ya que el segundo término de ambas soluciones es inferior al primero. Ello viene garantizado por la condición de que *b* es menor que *e*.

Puesto que ambas soluciones son indiferentes para el comprador, el proveedor escogerá el lote más grande, para rebajar el coste que le supone la bonificación a su cliente. El tamaño al que se llegará será por tanto el Q^a_4.

La figura 5 muestra las dos soluciones en función del tamaño de lote Q_1 del modelo inicial de Harris. El caso que discutimos en este apartado corresponde a la parte derecha del gráfico. La línea de puntos vertical divide la zona donde *b* es mayor que *e* y su complementaria.

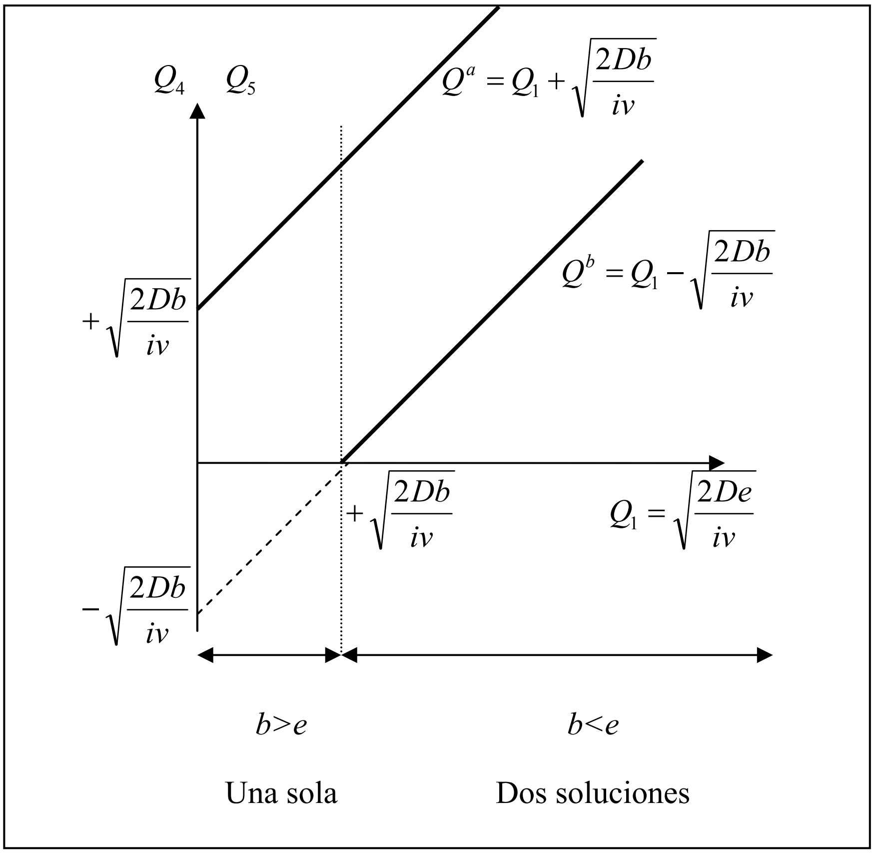

Figura 5. Soluciones del modelo cuando existe un coste de emisión *e* y un bonus por emisión *b*. En el eje vertical se representa tanto a Q_4 (caso *b<e*) como Q_5 (caso *b>e*)

6. Modelo con coste de emisión *e* y premio por reposición *b* (siendo *b* > *e*)

Es el caso complementario al anterior. Sin embargo, la geometría de la figura 6 es de distinta naturaleza de la que presenta la figura 4 del caso anterior. En efecto, aquí el efecto neto de coste de emisión y premio se inclina hacia el premio. Para hallar la solución se procede de manera análoga. Al analizar las dos soluciones resultantes en el anexo 2, se observa que la segunda de ellas es negativa, ya que al ser *b>e*, tenemos que el segundo término de las soluciones es superior al primero. Descartamos la solución negativa y obtenemos una solución única:

$$Q_5 = Q_1 + \sqrt{\frac{2Db}{iv}} \quad (9)$$

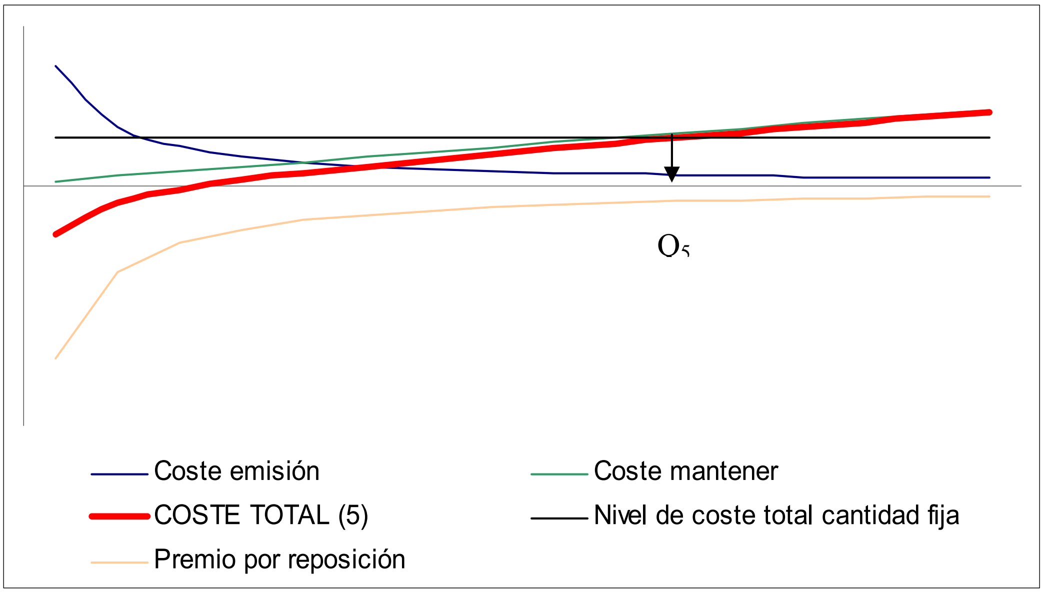

Figura 6. Costes de gestión de inventarios en función del tamaño de lote. Modelo en el que el comprador soporta el coste de emisión (*e*) y además obtiene un premio por cada reposición (*b*): caso en que *b*>*e*

Efectivamente, tanto la figura 5 como la 6 muestran gráficamente que cuando *b* es mayor que *e*, sólo se obtiene una solución positiva.

Referencias

Harris, F. W. (1913). "How many parts to make at once". *Factory, The Magazines of Management*, 10:135-136.

Heizer, J.; Render, B. (2007). *Dirección de la Producción y de las Operaciones. Decisiones tácticas* (8ª ed.). Pearson Prentice-Hall.

Noblitt, J.M. (2001). "The economic order quantity model: panacea or plague?" *APICS-The Performance Advantage* (febrero 2001), pp. 53-57.

Raymond, F.E. (1931). *Quantity and Economy in Manufacture*. New York: McGraw-Hill.

Whitin, T.M. (1953). *The Theory of Inventory Management*. Princeton University Press.

Whitin, T.M. (1954). "Inventory control research: A survey". *Management Science*, 1:32-40.

Wilson, R. H. (1934). "Scientific routine for stock control". *Harvard Business Review*, 13(1):116-128.

ANEXO 1

$$\sqrt{2Deiv} = Q\frac{iv}{2} - \frac{De}{Q}$$

$$Q\sqrt{2Deiv} = Q^2\frac{vi}{2} - De$$

$$Q^2\frac{vi}{2} - Q\sqrt{2Deiv} - De = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$Q = \frac{\sqrt{2Deiv} \pm \sqrt{2Deiv + 4\frac{iv}{2}De}}{2\frac{iv}{2}}$$

$$Q = \frac{\sqrt{2Deiv} \pm \sqrt{4Deiv}}{iv} = \frac{\sqrt{2Deiv} \pm \sqrt{2}\sqrt{2Deiv}}{iv} = \left(1 \pm \sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{2Deiv}}{iv} = \left(1 \pm \sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{2De}{iv}}$$

por tanto se llega a la expresión

$$Q_3 = \left(1 + \sqrt{2}\right)Q_1$$

La solución negativa no tiene sentido en nuestro caso.

ANEXO 2

El coste total viene determinado por la expresión:

$$C_{total\ 4} = C_{mantener} + C_{emición} - B_{emisión}$$

y este coste se quiere hacer equivalente al soportado por el comprador del primer apartado:

$$\sqrt{2Deiv} = \frac{Q}{2} iv + \frac{D}{Q} e - \frac{D}{Q} b$$

$$\frac{iv}{2} Q^2 - \sqrt{2Deiv}\ Q + D\left(e - b\right) = 0$$

resolviendo la ecuación de segundo grado, tenemos,

$$Q = \frac{\sqrt{2Deiv} \pm \sqrt{2Deiv - 4\frac{iv}{2} D\left(e - b\right)}}{2\frac{iv}{2}} = \frac{\sqrt{2Deiv} \pm \sqrt{2Div\ (e - e + b)}}{iv} = \frac{\sqrt{2Deiv} \pm \sqrt{2Dbiv}}{iv}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2De}{iv}} \pm \sqrt{\frac{2Db}{iv}}$$

teniendo en cuenta la expresión Q_1, tenemos que las dos soluciones son:

$$Q^a = Q_1 + \sqrt{\frac{2Db}{iv}}$$

$$Q^b = Q_1 - \sqrt{\frac{2Db}{iv}}$$