

## **Modelo de planificación agregada de la producción, la plantilla, el tiempo de trabajo y la tesorería**

**Orlando Dante Boiteux<sup>1</sup>, Albert Corominas<sup>2</sup>, Amaia Lusa<sup>2</sup>, Carme Martínez<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Instituto de Organización y Control de Sistemas Industriales.

<sup>2</sup> Instituto de Organización y Control de Sistemas Industriales y Dpto. de Organización de Empresas. Universitat Politècnica de Catalunya. Av. Diagonal, 647, p 11, 08028, Barcelona. {orlando.boiteux\albert.corominas\amaia.lusa\mcarne.martinez}@upc.edu.

**Palabras clave:** Planificación agregada, planificación de la producción, finanzas.

### **1. Introducción**

En este trabajo se propone un modelo de planificación agregada (PA) que incorpora, junto a la planificación de la producción, la gestión de la tesorería y las finanzas, a corto plazo, y la organización flexible del tiempo de trabajo, con un sistema de cuentas de horas. Esto último, unido al hecho de considerar una relación no lineal entre la dimensión de la plantilla y la capacidad de la planta por unidad de tiempo, implica una relación entre producción y horas de trabajo disponibles más compleja y realista que la asumida en los modelos tradicionales de PA. En un previo análisis de la literatura (Boiteux et al., 2007a y 2007b) se detectan limitaciones de los modelos propuestos y la consiguiente necesidad de abrir nuevas líneas de investigación para que la PA pueda ser realmente un instrumento para determinar, a medio plazo, las actividades de las principales áreas funcionales de la empresa y para garantizar la coordinación de las mismas, mejorando de esta forma la eficiencia y los beneficios globales. El modelo de PA aquí propuesto pretende ser un paso en esta dirección.

### **2. Características principales del modelo**

Con pocas excepciones (Kirca y Köksalan, 1996) los modelos de PA no incluyen las decisiones relativas a la gestión de la tesorería y las finanzas a corto plazo. En el modelo propuesto se consideran los cobros y los pagos derivados de decisiones irreversibles, anteriores al inicio del horizonte de planificación, así como los que son consecuencia de las decisiones que se determinarán a partir del propio modelo. Tanto en el caso de los cobros como en el de los pagos se distingue entre los que repercuten en la cuenta de pérdidas y ganancias y los que no, ya que los primeros intervienen en el cálculo del beneficio, que es la función objetivo, y, por consiguiente, en el del impuesto correspondiente.

Por otra parte, en los modelos tradicionales de PA (Holt et al., 1955) se asume que el recurso cuello de botella es la mano de obra, que la empresa puede despedir y contratar sin limitaciones y, en general, que el personal recién contratado es tan eficiente como el más antiguo; la flexibilidad en la capacidad de producción se deriva de la mencionada posibilidad de variar la dimensión de la plantilla, así como de la de realizar horas extras. En el actual estado de desarrollo tecnológico, sin embargo, lo más común es que el recurso cuello de botella sea un bien de equipo, y que, por consiguiente, las variaciones de la plantilla (en que la eficiencia de cada uno de sus miembros depende de su antigüedad en la empresa) tengan un

efecto no lineal sobre la capacidad de producción. Además, junto a las horas extras, existen muchos otros instrumentos, (anualización de jornada, cuentas de horas, con múltiples variantes) para la organización flexible del tiempo de trabajo; pero los modelos de PA que consideran anualización o cuentas de horas publicados hasta ahora (Corominas et al., 2007a-b) no incluyen la posibilidad de variar el tamaño de la plantilla. En el modelo propuesto, se supone que la empresa utiliza un sistema de cuentas de horas y que la capacidad en un periodo dado es el producto del número de horas de trabajo en dicho periodo por una función (la capacidad horaria) de lo que denominamos “dimensión efectiva” de la plantilla, que tiene en cuenta la falta de experiencia del personal contratado recientemente. Además admite la posibilidad de contratar y despedir y se tiene en cuenta que los costes del despido dependen de las personas afectadas, puesto que son función de la antigüedad y del saldo de la cuenta de horas, que puede ser distinto para cada persona.

- Los cobros y pagos que se tienen en cuenta en la gestión de la tesorería son los relativos a dividendos, impuestos (sobre el valor añadido y sobre el beneficio, para el cálculo del cual se tiene en cuenta, como un dato, la amortización), compras y ventas (con posible pronto pago a proveedores o descuento de efectos), a la gestión del personal (incluyendo los pagos a la seguridad social y a la hacienda pública), a infraestructuras y suministros e impuestos. Asimismo, los derivados de la propia gestión financiera, tales como los vinculados a préstamos, cuentas de crédito, cuentas corrientes, depósitos a plazo, adquisición de títulos de deuda pública y participaciones en fondos de inversión. Aunque la mayoría de las variables representativas de las magnitudes asociadas a la gestión de la tesorería y las finanzas a corto plazo pueden definirse como reales, el tratamiento de algunos aspectos de dicha gestión (costes fijos asociados, por ejemplo, a la constitución de un préstamo o bien condiciones de “lote mínimo” sobre algunas magnitudes) requiere variables binarias.
- El modelo propuesto es un programa lineal mixto, cuyo objetivo es maximizar el beneficio de la empresa (que se puede sustituir por otros que resulten más convenientes en una situación específica).
- Dada la limitación de espacio se ha optado por prescindir de algunos elementos del modelo (como los préstamos, los fondos de inversión y las cuentas corrientes). El modelo completo puede consultarse en (Boiteux et al., 2008) y, en todo caso, el que aquí se presenta es suficientemente ilustrativo.

### 3. Modelo

En este modelo la plantilla que se considera (y que incluye personal fijo y personal temporal – este último con un rendimiento inferior) es la que trabaja directamente en una sección “cuello de botella” y cuyas variaciones repercuten en la capacidad de producción. Se supone que todos los miembros de dicha plantilla realizan la misma función y están sujetos a los mismos horarios.

#### ○ Datos

La planta fabrica una serie de familias de productos (conjunto  $P$ ) de cuya demanda se tiene una previsión ( $D_{it}$ ) para todo el horizonte ( $T$ ) y que requieren de diversos materiales y componentes (conjunto  $M$ , siendo  $\delta_{im}^{MP}$  la lista de materiales). Se consideran los precios

medios de venta y de compra estimados para cada periodo ( $c_{it}^P, c_{mt}^M$ ). Los cobros y los pagos se pueden adelantar mediante *factoring* (hasta un cierto número de periodos,  $T^{CU}$ , aplicando los coeficientes correspondientes,  $r_p^{CU}$ ) y pronto pago ( $T^{PS}, r_p^{PS}$ ), respectivamente. Se conocen los stocks iniciales ( $q_{i0}^{Ps}, q_{m0}^{Ms}$ ), así como los saldos iniciales de las cuentas por cobrar y por pagar que vencen en determinados periodos ( $B0_{\tau}^{CU}$  y  $B0_{\tau}^{PS}$ , respectivamente). Mantener las unidades en stock tiene un coste ( $c_{it}^{Ps}, c_{mt}^{Ms}$ ), así como los suministros y materiales necesarios para llevar a cabo la producción ( $c_{it}^S$ ).

Se dispone de una lista ordenada de periodos en que se debe efectuar cada uno de los diversos pagos ( $T^S, T^T$  y  $T^{IVA}$  para los salarios, el IRPF y el IVA, respectivamente). Para cada elemento  $p$  de cada una de estas listas, se define el elemento inmediatamente anterior como  $t_p^{s-}, t_p^{T-}$  y  $t_p^{IVA-}$ , respectivamente. Se dispone también de los coeficientes para el cálculo de los pagos de la seguridad social a cargo del trabajador, del IRPF, de la seguridad social a cargo de la empresa y del IVA ( $r^{Rss}, r^{IRPF}, r^{RSS}$  y  $r^{IVA}$ , respectivamente).

Se dispone de una plantilla inicial ( $W0$ ) y de una previsión de la misma ( $w_t$ ), teniendo en cuenta sólo las bajas ya programadas ( $\alpha_{jt}^{dp}$  indica si el trabajador  $j$  va a causar baja en el período  $t$ ). Se considera que RRHH ha proporcionado la previsión de los pagos por salarios y seguridad social de la plantilla inicial ( $O_t^W$ ), así como el salario de los trabajadores ( $c_t^W$ ) y los pagos por el IRPF previstos ( $O_t^{IRPF}$ ). Los pagos de infraestructura (salarios de los demás trabajadores, alquileres, seguridad, etc.) se suponen también conocidos ( $O_t^I$ ).

Todos los trabajadores realizan el mismo horario, que se rige, en el caso de los trabajadores de plantilla, por un sistema de cuentas de horas (véase Corominas et al., 2007b para más detalles). Cada trabajador parte de un saldo de horas ( $s_{j0}^{h0}$ ) conocido. El número estándar de horas de trabajo es  $q^h$ , pero se pueden trabajar más o menos horas según convenga. En cada semana el número de horas de más que se pueden computar en la cuenta de horas está acotado ( $U_t^{h+}$ ), así como el número de horas de más consideradas como horas extras ( $U_t^{he}$ ). En cualquier caso, en ningún periodo se trabaja más de  $q^{hmx}$  horas. El número total de horas extras también está limitado ( $U^{he}$ ). El coste de las horas extras para los trabajadores de plantilla y temporales es  $c_t^{he}$ . Por otra parte, el coste de las horas trabajadas por los temporales por encima del valor estándar es  $cs_t^{h+}$ .

Es posible contratar trabajadores temporales y de plantilla (no más de  $W^{sub}$  y  $Nmx$ , respectivamente, en un período), así como despedir personal, en unos periodos determinados ( $T^C, T^D$ ). El número de trabajadores en plantilla está acotado ( $W^{mn}, W^{mx}$ ). Se dispone de una estimación de la evolución de los costes de contratación de los trabajadores de plantilla y de los temporales ( $c_t^{W+}$  y  $c_t^{WS}$ ). Cuando se despide a un trabajador en el periodo  $t$  se le debe pagar, además de la indemnización ( $C_{jt}^+$  y  $C_{\tau t}$  según se trate, respectivamente, de un trabajador  $j$  de la plantilla inicial o de uno contratado  $\tau$ ), las horas de más trabajadas ( $Ch_j^+$  y  $Ch$ ). Se asume que los nuevos trabajadores de plantilla requieren un tiempo ( $T^{apz}$ ) para

alcanzar el máximo rendimiento ( $\delta_n^{apz}$  es el coeficiente para el cálculo del rendimiento al cabo de  $n$  periodos). Para los temporales, se asume un coeficiente constante e igual a  $\delta^{sub}$ . La capacidad de producción horaria depende del tamaño de la plantilla ( $\delta_j$  con  $j$  trabajadores de máximo rendimiento); por ejemplo, la capacidad puede expresarse en horas de máquina disponibles por hora de funcionamiento del sistema y este número depende del tamaño de la plantilla. La capacidad requerida para obtener una unidad de producto  $i$  en el periodo  $t$  es  $k_{it}$  (en el ejemplo anterior, horas de máquina por unidad de producto).

Para el pago del impuesto de sociedades, se considera que el horizonte de planificación puede incluir periodos correspondientes a dos años naturales consecutivos ( $t^f$  es el periodo en que finaliza el año natural en curso). En su cálculo se tiene en cuenta, además del beneficio resultante de la planificación: el beneficio obtenido en los periodos anteriores al inicio del horizonte de planificación y pertenecientes al año natural en curso ( $B0^{IS}$ ); las listas de periodos en que se deben realizar los pagos a cuenta ya conocidos o a determinar ( $T0^{IS}$  y  $T^{IS}$ , respectivamente); los pagos a cuenta ya conocidos ( $O_i^{IS}$ ); el total de pagos a cuenta realizados o a realizar en el año natural en curso ( $Bo_0^{IS}$ ); el período en que se debe pagar la cuota íntegra del impuesto ( $t^{IS}$ ); y los coeficientes para el cálculo de la cuota íntegra y de los pagos a cuenta a realizar en el siguiente año natural ( $r^{IS}$  y  $r^{ISp}$ ).

Para simplificar el modelo, en la gestión de la tesorería se ha considerado únicamente, además de la gestión de los cobros y los pagos ya indicados, la financiación mediante cuentas de crédito y la colocación de excedentes mediante la inversión en títulos al descuento.

Cada una de las cuentas de crédito abiertas o que se pueden abrir (conjuntos  $LA0$  y  $LA$ ) se caracteriza por: el banco (se consideran  $B$  bancos) que ofrece el producto ( $b_k^{LA0}$  y  $b_k^{LA}$ ); los periodos de apertura y cierre ( $ti_k^{LA}$  y  $tf_k^{LA}$ ); los coeficientes para el cálculo de la comisión de apertura, de los intereses sobre el dinero utilizado y de los intereses sobre el dinero disponible no utilizado ( $r_k^{LAc}$ ,  $r_k^{LAI}$  y  $r_k^{LAI}$ , respectivamente); el coste fijo por apertura ( $c_k^{LA}$ ); la cantidad mínima y máxima que se puede solicitar ( $L_k^{LA}$  y  $U_k^{LA}$ ) y los periodos de pago de los intereses (lista  $T_k^{LA}$ ;  $t_p^{LA-}$  es el elemento anterior a  $p$  en dicha lista). Para las cuentas ya abiertas, se conoce el importe nominal ( $q_k^{LA0}$ ) así como el saldo utilizado ( $B_k^{LA0}$ ) al inicio del horizonte. Por otra parte, algunas de las cuentas consideradas para abrir son renovaciones de cuentas ya abiertas.  $LAp$  es un conjunto de parejas de cuentas, siendo el segundo el elemento la renovación del primer elemento.

Cada uno de los títulos al descuento (aquéllos en que se ha invertido anteriormente,  $TD0$ , y aquéllos en que es posible invertir dentro del horizonte de planificación,  $TD$ ) se caracteriza por: los periodos de inicio y fin ( $ti_k^{TD}$  y  $tf_k^{TD}$ ); las cantidades mínima y máxima a invertir ( $L_k^{TD}$  y  $U_k^{TD}$ ); y los coeficientes para el cálculo del descuento correspondiente al vender ( $r_{kt}^{TD}$ ). Se conoce el saldo inicial de títulos al descuento en los que se ha invertido anteriormente ( $B0_k^{TD}$ ).  $M_{jt}^{dn}$ ,  $M_{\tau t}^{cdd}$  y  $M_t^{sub}$  son parámetros auxiliares utilizados en la modelización cuyos valores se deben calcular en cada caso.

Para tener en cuenta el pago del Impuesto de Sociedades es necesario conocer el balance inicial del beneficio del horizonte anterior ( $B0^{IS}$ ) y la sumatoria de los pagos a cuenta del año

natural en curso ( $Bo_0^{IS}$ ), al inicio del horizonte, incluyendo los pagos realizados y por realizar. Se deben tener en cuenta las fechas de los pagos a cuenta ( $T0^{IS}$ ), y la fecha de pago del impuesto,  $t^{IS}$ . Si el horizonte no coincide con la finalización del año natural, se debe indicar el periodo en que termina el año natural. Los coeficientes para el pago de la cuota integra del Impuesto de Sociedades y de los pagos a cuenta son  $r^{IS}$  y  $r^{ISp}$ . Los pagos a cuenta que son datos están expresado por  $O_t^{IS}$ .

#### ○ Variables

En relación con la gestión de cobros de clientes y pagos a proveedores se definen: las cantidades a cobrar y a pagar en el período  $t$ , de facturas que vencen en  $\tau$ , ya sean emitidas dentro del horizonte de planificación ( $I_{itr}^C$  y  $o_{mtr}^{PS}$ ) o con anterioridad ( $IO_{itr}^C$  y  $o0_{itr}^{PS}$ ); y los saldos de cuentas por cobrar y por pagar al final del horizonte, según el periodo de vencimiento ( $Bfin_{it}^{CU}$  y  $Bfin_{mt}^{PS}$ ).

Las variables relativas a la gestión de la producción y de la plantilla incluyen las unidades a fabricar ( $q_{it}^{Pp}$ ), los niveles de stock ( $q_{it}^{Ps}$ ), la cantidad de material o componentes que deben entregar los proveedores ( $q_{mt}^{Mr}$ ) y los niveles de stock de estos materiales ( $q_{mt}^{Ms}$ ).

Para la gestión del tiempo de trabajo se definen como variables, para cada periodo  $t$ : las horas de trabajo por encima y por debajo del valor de referencia que deben computarse en las cuentas de horas ( $q_t^{h+}$  y  $q_t^{h-}$ ); las horas extras a realizar ( $q_t^{he}$ ); el número de horas extras a realizar por el conjunto de los trabajadores ( $Q_t^{he}$ ); el saldo (puede ser positivo, negativo o nulo) y el saldo positivo (horas de más realizadas) de la cuenta de horas de cada trabajador de la plantilla inicial ( $s_{jt}^{h0}$  y  $\hat{s}_{jt}^{h0}$ ); y el saldo y el saldo positivo de la cuenta de horas de los trabajadores contratados en el periodo  $\tau$  ( $s_{\tau t}^h$  y  $\hat{s}_{\tau t}^h$ ).

Además de la dimensión de la plantilla ( $w_t^r$ ), se define la dimensión equivalente de la plantilla ( $w_t^e$ ), cuyo cálculo se realiza teniendo en cuenta el rendimiento de los trabajadores contratados y de los temporales. Se definen también el número de trabajadores de plantilla y temporales a contratar ( $w_t^+$  y  $w_t^{sub}$ ) y el número de trabajadores de plantilla que son contratados en  $\tau$  y despedidos en  $t$  ( $w_{\tau t}^{\pm}$ ). La variable binaria  $y_{st}^{sub}$  indica si se han contratado  $s$  trabajadores temporales, la binaria  $y_{jt}^{d0}$  indica si se da de baja al trabajador  $j$  y la binaria  $y_{n\tau t}^d$  indica si se han contratado  $n$  trabajadores en  $\tau$  y se han despedidos en  $t$ . Finalmente, la variable binaria  $r_{jt}$  se utiliza para relacionar la dimensión equivalente de la plantilla con la capacidad de producción necesaria.

El pago por contratación de personal temporal se define como variable ( $c_t^{sub}$ ), así como los pagos por despidos (porque dependen del saldo de la cuenta de horas). De este modo, se define el coste de la baja de un trabajador de la plantilla inicial, programada y no programada ( $c_{jt}^{p0}$  y  $c_{jt}^{np0}$ ), el coste debido al despido de trabajadores contratados en  $\tau$  ( $c_{\tau t}^-$ ).

En relación con las cuentas de crédito, se define una variable binaria que indica si se abre (o renueva) o no un determinado tipo de cuenta ( $\delta_k^{LA}$ ). Además, se incluyen el importe nominal

de cada cuenta abierta o renovada ( $q_k^{LA}$ ), el saldo utilizado ( $B_{kt}^{LA}$ ) y el retorno o reintegro ( $f_{kt}^{LA}$ ). Para cada título al descuento  $k$ , se definen unas variables binarias que indican si se invierte o no en él, en ciertos períodos ( $\delta_{kt}^{TD}$ ). Además, se definen como variables el saldo (en valor nominal) en el periodo  $t$ , de los títulos comprados en el periodo  $\tau$  ( $B_{k\tau t}^{TD}$ ), el pago por adquisición en el período  $\tau$  ( $o_{k\tau}^{TD}$ ) y el cobro por la venta de títulos comprados en  $\tau$  y vendidos en  $t$  ( $v_{k\tau t}^{TD}$ ).

Por último, para el cálculo de la cuota íntegra del impuesto de sociedades, se define como variable el beneficio obtenido desde el primer período del horizonte de planificación hasta el último periodo del año fiscal en curso al inicio del horizonte ( $B^{IS}$ ).

### ○ Modelo

$$\begin{aligned}
 [MAX] \quad & \left[ \begin{aligned}
 & \sum_{t=1}^T \sum_{\forall i \in P} c_{it}^P \cdot D_{it} \cdot (1 - r^{IVA}) + \left( \sum_{t=T}^{T+T^{CU}} \sum_{i \in P} Bfin_{it}^{CU} - \sum_{t=T}^{T+T^{PS}} \sum_{m \in M} Bfin_{mt}^{PS} \right) + \sum_{i \in P} c_{iT}^P \cdot q_{iT}^{Ps} + \sum_{m \in M} c_{mT}^M \cdot q_{mT}^{Ms} + \\
 & \sum_{k \in TD \cup TD0} \sum_{\substack{f_k^{TD} > T \\ \tau = t_k^{TD}}}^{T-1} (r_{k\tau}^{TD} \cdot B_{k\tau t}^{TD}) - \sum_{t=1}^T \sum_{\forall m \in M} c_{mt}^M \cdot q_{mt}^{Mr} \cdot (1 - r^{IVA}) - \sum_{k \in LA \cup LA0} \sum_{\substack{t_k^{LA} < T \\ t < t_k^{LA}}} (q_k^{LA} - B_{kt}^{LA}) - \\
 & \sum_{j \in W^0} \sum_{t \in T^D} (c_{jt}^{np0} + c_{jt}^{p0}) - \sum_{t=1}^T c_t^{sub} - \sum_{\forall p \in T^S} \sum_{|\leq p \leq T} \sum_{\tau = (t_p^{S^-} + 1)}^p (c_{\tau}^{he} \cdot Q_{\tau}^{he}) - \sum_{t \in T^C} (c_t^{W^+} \cdot w_t^+) - \sum_{\forall p \in T^T} O_p^{IRPF} - \\
 & \sum_{\forall p \in T^S} \sum_{|\leq p \leq T} \sum_{\tau = t_p^{S^-} + 1}^p (c_p^W \cdot (w_{\tau}^r - w_{\tau}) / (p - t_p^{S^-})) \cdot (1 - r^{Rss} - r^{IRPF}) - \sum_{\tau \in T^{IS}} r^{ISp} \cdot (r^{IS} \cdot (B0^{IS} + B^{IS})) - \\
 & \sum_{\forall p \in T^S} \sum_{|\leq p \leq T} \left[ (O_p^W + O_p^I \cdot (1 - r^{IVA})) + \sum_{\tau = t_p^{S^-} + 1}^p r^{RSS} \cdot (c_p^W \cdot (w_{\tau}^r - w_{\tau}) / (p - t_p^{S^-})) \right] - \sum_{\tau \in T^0} O_{\tau}^{IS} - \\
 & \sum_{t=1}^T \left[ \sum_{\forall i \in P} c_{it}^{Ps} \cdot q_{it}^{Ps} + \sum_{\forall m \in M} c_{mt}^{Ms} \cdot q_{mt}^{Ms} + \sum_{\forall i \in P} c_{it}^{S} \cdot q_{it}^{Pp} \right] \cdot (1 - r^{IVA}) - \sum_{t \in [1, \dots, T]} (r^{IS} \cdot (B0^{IS} + B^{IS}) - B0^{IS}) - \\
 & \sum_{\forall p \in T^T} \sum_{|\leq p \leq T} \sum_{t \in [t_p^{T^-} + 1, \dots, p]} \sum_{\tau \in T^S} r^{IRPF} \cdot (c_t^W \cdot (w_{\tau}^r - w_{\tau}) / (t - t_t^{S^-})) - \sum_{\tau \in T^C} \sum_{t < \tau} \sum_{t \in T^D} c_{\tau t}^-
 \end{aligned} \right]
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

$$w_t^e \geq \sum_{j=1}^{W^{mx}} j \cdot r_{jt} \quad t = 1, \dots, T \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{W^{mx}} r_{jt} = 1 \quad t = 1, \dots, T \tag{3}$$

$$\sum_{i \in P} (k_{it} \cdot q_{it}^{Pp}) \leq \delta_j \cdot (q_t^h + q_t^{h+} - q_t^{h-} + q_t^{he}) + \delta_{W^{mx}} \cdot q^{hmx} \cdot (1 - r_{jt}) \quad j = 1, \dots, W^{mx}; t = 1, \dots, T \tag{4}$$

$$q_{pt}^{Pp} + q_{i,(t-1)}^{Ps} = D_{it} + q_{it}^{Ps} \quad \forall i \in P; t = 1, \dots, T \tag{5}$$

$$q_{mt}^{Mr} + q_{m,(t-1)}^{Ms} = \sum_{i \in P} (\delta_{im}^{MP} \cdot q_{it}^{Pp}) + q_{mt}^{Ms} \quad \forall m \in M : t = 1, \dots, T \tag{6}$$

$$c_{it}^P \cdot D_{it} = \sum_{\tau=t+1}^{t+T^{CU}} \left( I_{i,\tau,(t+T^{CU})}^C / r_{(\tau-t)}^{CU} \right) \quad \forall i \in P, t=1, \dots, T-T^{CU} \quad [7]$$

$$c_{it}^P \cdot D_{it} = \sum_{\tau=t+1}^T \left( I_{i,\tau,(t+T^{CU})}^C / r_{(\tau-t)}^{CU} \right) + Bfin_{i,(t+T^{CU})}^{CU} \quad \forall i \in P, t=T-T^{CU}+1, \dots, T \quad [8]$$

$$B0_{\tau}^{CU} = \sum_{t=1}^{\tau} \left( I0_{t\tau}^C / r_{(T^{CU}-\tau+t)}^{CU} \right) \quad \tau=1, \dots, T^{CU} \quad [9]$$

$$c_{mt}^M \cdot q_{mt}^{Mr} = \sum_{\tau=t+1}^{t+T^{PS}} \left( o_{m,\tau,(t+T^{PS})}^{PS} / r_{(\tau-t)}^{PS} \right) \quad \forall m \in M, t=1, \dots, T-T^{PS} \quad [10]$$

$$c_{mt}^M \cdot q_{mt}^{Mr} = \sum_{\tau=t+1}^T \left( o_{m,\tau,(t+T^{PS})}^{PS} / r_{(\tau-t)}^{PS} \right) + Bfin_{m,(t+T^{PS})}^{PS} \quad \forall m \in M, t=T-T^{PS}+1, \dots, T \quad [11]$$

$$B0_{\tau}^{PS} = \sum_{t=1}^{\tau} \left( o0_{t\tau}^{PS} / r_{(T^{PS}-\tau+t)}^{PS} \right) \quad \tau=1, \dots, T^{PS} \quad [12]$$

$$w_t^r = w_{t-1}^r + w_t^+ - (w_{t-1} - w_t) - \sum_{i \in W0} y_{it}^{d0} - \sum_{j \in T^C | j < t} w_{jt}^{\pm} \quad \forall t \in (T^C \cap T^D) \quad [13]$$

$$w_t^r = w_{t-1}^r + w_t^+ - (w_{t-1} - w_t) \quad \forall t \in (T^C - T^D) \quad [14]$$

$$w_t^r = w_{t-1}^r - (w_{t-1} - w_t) - \sum_{i \in W0} y_{it}^{d0} - \sum_{j \in T^C | j < t} w_{jt}^{\pm} \quad \forall t \in (T^D - T^C) \quad [15]$$

$$w_t^r = w_{t-1}^r - (w_{t-1} - w_t) \quad \forall t \in T - (T^C \cup T^D) \quad [16]$$

$$w_t^e = w_t^r - \left[ \sum_{n \in [0, \dots, T^{apz}]} \sum_{(t-n) \in T^C} \left( (1 - \delta_n^{apz}) \cdot w_{t-n}^+ \right) \right] + (\delta^{sub} \cdot w_t^{sub}) \quad t=1, \dots, T \quad [17]$$

$$w_t^{sub} \leq W^{sub} \quad t=1, \dots, T \quad [18]$$

$$c_{it}^{np0} \geq (C_{it}^+ + Ch_i^+ \cdot \hat{s}_{it}^{h0} - M_{it}^{dn} \cdot (1 - y_{it}^{d0})) \quad \forall i \in W0; \forall t \in T^D \quad [19]$$

$$y_{it}^{d0} \leq 1 - \sum_{\tau \in T^D | \tau < t} y_{i\tau}^{d0} \quad \forall i \in W0; \forall t \in T^D \quad [20]$$

$$s_{it}^{h0} = s_{i,(t-1)}^{h0} + q_t^{h+} - q_t^{h-} \quad \forall i \in W0; t=1, \dots, T \quad [21]$$

$$s_{it}^{h0} \leq \hat{s}_{it}^{h0} \quad \forall i \in W0; \forall t \in T^D \quad [22]$$

$$c_{it}^{p0} = \alpha_{it}^{dp} \cdot Ch_i^+ \cdot \hat{s}_{it}^{h0} \quad \forall i \in W0; \forall t \in T^D \quad [23]$$

$$w_{\tau t}^{\pm} = \sum_{n=1}^{Nmx} n \cdot y_{n\tau t}^d \quad \tau \in T^C; \forall t \in T^D | t > \tau \quad [24]$$

$$\sum_{n=1}^{Nmx} y_{n\tau t}^d \leq 1 \quad \tau \in T^C; \forall t \in T^D | t > \tau \quad [25]$$

$$\sum_{\forall t \in T^D | \tau < t} w_{\tau t}^{\pm} \leq w_{\tau}^+ \quad \forall \tau \in T^C \quad [26]$$

$$q_t^{h+} \leq U_t^{h+} \quad t=1, \dots, T \quad [27]$$

$$s_{\tau t}^h = q_t^{h+} - q_t^{h-} \quad \forall \tau \in T^C; t=\tau, \dots, T \quad [28]$$

$$s_{\tau t}^h \leq \hat{s}_{\tau t}^h \quad \forall \tau \in T^C; \forall t \in T^D | t > \tau \quad [29]$$

$$c_{\tau t}^- \geq C_{\tau t} \cdot n + Ch \cdot n \cdot \hat{s}_{\tau t}^h - M_{\tau t}^{cdd} \cdot (1 - y_{n\tau t}^d) \quad n=1, \dots, Nmx; \tau \in T^C; \forall t \in T^D | t > \tau \quad [30]$$

$$w_t^{sub} = \sum_{s=1}^{W^{sub}} s \cdot y_{st}^{sub} \quad t = 1, \dots, T \quad [31]$$

$$\sum_{s=1}^{W^{sub}} y_{st}^{sub} \leq 1 \quad t = 1, \dots, T \quad [32]$$

$$c_t^{sub} \geq (c_t^{WS} + c_s^{h+} \cdot q_t^{h+}) \cdot s - M_t^{sub} \cdot (1 - y_{st}^{sub}) \quad s = 1, \dots, W^{sub}; t = 1, \dots, T \quad [33]$$

$$q_t^{he} \leq U_t^{he} \quad t = 1, \dots, T \quad [34]$$

$$\sum_{t=1}^T q_t^{he} \leq U^{he} \quad [35]$$

$$Q_i^{he} \geq j \cdot q_t^{he} - W^{mx} \cdot U_t^{he} \cdot (1 - r_{jt}) \quad j = 1, \dots, W^{mx}; t = 1, \dots, T \quad [36]$$

$$\delta_{k'}^{LA} \leq \delta_k^{LA} \quad \forall (k, k') \in LAp \quad [37]$$

$$q_k^{LA} = q_k^{LA0} \quad \forall k \in LA0 \quad [38]$$

$$0 \leq B_{kt}^{LA} \leq q_k^{LA} \quad \forall k \in LA \cup LA0; t = ti_k^{LA}, \dots, \min(tf_k^{LA} - 1, T) \quad [39]$$

$$B_{k0}^{LA} = B_k^{LA0} \quad \forall k \in LA0 \quad [40]$$

$$B_{kt}^{LA} = B_{k,t-1}^{LA} - f_{kt}^{LA} \quad \forall k \in LA \cup LA0; t = ti_k^{LA}, \dots, \min(tf_k^{LA} - 1, T) \quad [41]$$

$$L_k^{LA} \cdot \delta_k^{LA} \leq q_k^{LA} \leq U_k^{LA} \cdot \delta_k^{LA} \quad \forall k \in LA \quad [42]$$

$$B_{k\tau t}^{TD} = B_{k\tau, (t-1)}^{TD} - v_{k\tau t}^{TD} \quad \forall k \in TD; \tau = ti_k^{TD}, \dots, \min(tf_k^{TD} - 1, T); t = \tau + 2, \dots, \min(tf_k^{TD} - 1, T) \\ \forall k \in TD0; \tau = ti_k^{TD}, \dots, 0; t = 1, \dots, \min(tf_k^{TD} - 1, T) \\ \forall k \in TD0; \tau = 1, \dots, \min(tf_k^{TD} - 1, T); t = \tau + 2, \dots, \min(tf_k^{TD} - 1, T) \quad [43]$$

$$B_{k\tau t}^{TD} = o_{k\tau}^{TD} - v_{k\tau t}^{TD} \quad \forall k \in TD; \tau = ti_k^{TD}, \dots, \min(tf_k^{TD} - 1, T); t = \tau + 1 \\ \forall k \in TD0; \tau = 1, \dots, \min(tf_k^{TD} - 1, T); t = \tau + 1 \quad [44]$$

$$L_k^{TD} \cdot \delta_{k\tau}^{TD} \leq o_{k\tau}^{TD} \leq U_k^{TD} \cdot \delta_{k\tau}^{TD} \quad \forall k \in TD \cup TD0; \tau = \max(1, ti_k^{TD}), \dots, \min(tf_k^{TD} - 1, T) \quad [45]$$

$$B^{IS} = \sum_{t=1}^{t^f} \sum_{\forall i \in P} c_{it}^P \cdot D_{it} \cdot (1 - r^{IVA}) + \sum_{\forall k \in TD \cup TD0} \sum_{\forall k' \in TD0} \sum_{\tau=ti_k^{TD}}^{\min(tf_k^{TD}-1, t^f-1)} (r_{k,tf_k^{TD}}^{TD} - r_{k\tau}^{TD}) \cdot B_{k\tau,tf_k^{TD}-1}^{TD} + \\ \sum_{\forall k \in TD \cup TD0} \sum_{\tau=ti_k^{TD}}^{\min(t^f-1, tf_k^{TD}-1)} \sum_{t=\max(1, \tau+1)}^{\min(t^f, tf_k^{TD}-1)} (r_{kt}^{TD} - r_{k\tau}^{TD}) \cdot v_{k\tau t}^{TD} - \sum_{t=1}^{t^f} \sum_{\forall m \in M} c_{mt}^M \cdot q_{mt}^{Mr} \cdot (1 - r^{IVA}) - \\ \sum_{t \in T^C} \sum_{\tau \leq t^f} (c_t^{W+} \cdot w_t^+) - \sum_{j \in W0} \sum_{t \in T^D} \sum_{\tau \leq t^f} (c_{jt}^{np0} + c_{jt}^{p0}) - \sum_{t=1}^{t^f} c_t^{sub} - \sum_{\forall p \in T^S} \sum_{\tau=(t_p^{S-}+1)}^p (c_\tau^{he} \cdot Q_\tau^{he}) - \\ \sum_{\forall p \in T^S} \sum_{\tau=t_p^{S-}+1}^p (c_p^W \cdot (w_\tau^r - w_\tau) / (p - t_p^{S-})) \cdot (1 - r^{RSS} - r^{IRPF}) - \sum_{\tau \in T^C} \sum_{\tau < t^f} \sum_{t \in T^D} \sum_{\tau \leq t^f} c_{\tau t}^- - \\ \sum_{\forall p \in T^S} \sum_{\tau=t_p^{S-}+1}^p \left[ (O_p^W + O_p^I \cdot (1 - r^{IVA})) + \sum_{\tau=t_p^{S-}+1}^p r^{RSS} \cdot (c_p^W \cdot (w_\tau^r - w_\tau) / (p - t_p^{S-})) \right] - \\ \sum_{t=1}^{t^f} \left[ \sum_{\forall i \in P} c_{it}^{Ps} \cdot q_{it}^{Ps} + \sum_{\forall m \in M} c_{mt}^{Ms} \cdot q_{mt}^{Ms} + \sum_{\forall i \in P} c_{it}^S \cdot q_{it}^{Pp} \right] \cdot (1 - r^{IVA}) - \sum_{\forall p \in T^T} \sum_{\tau \leq t^f} O_p^{IRPF} -$$



$$\begin{aligned}
& \sum_{\forall p \in T^T} \sum_{1 \leq p \leq t^f} \sum_{t \in [t_p^{T^-} + 1, \dots, p]} \sum_{\tau = t_p^{S^-} + 1}^t r^{IRPF} \cdot (c_t^W \cdot (w_\tau^r - w_\tau) / (t - t_p^{S^-})) - \\
& \sum_{t=1}^{t^f} \left( \sum_{\forall k \in LA} \left( c_k^{LA} \cdot \delta_k^{LA} + r_k^{LA} \cdot q_k^{LAc} \right) \right) - \sum_{t=1}^{t^f} \sum_{\forall k \in LA \cup LA0} \sum_{\tau = t_k^{LA^-} + 1}^t \left( r_k^{LAI} \cdot B_{k\tau}^{LA} + r_k^{LAI} \cdot (q_k^{LA} - B_{k\tau}^{LA}) \right)
\end{aligned} \tag{46}$$

En [1] se presenta la función objetivo, que maximiza los activos y cobros totales menos los pasivos y pagos totales de la empresa al finalizar el horizonte temporal.

Las ecuaciones [2] a [4] limitan la capacidad de producción. La ecuación [5] se corresponde con el balance de producción, stock y demanda. En la ecuación [6] se determina el aprovisionamiento de material necesario. En las ecuaciones [7] a [9] se relacionan las cantidades facturadas (función del precio del producto y de la demanda) con los cobros, que pueden tener lugar (total o parcialmente) en el periodo de vencimiento o antes (con un descuento) si se hace uso del *factoring*. En la ecuación [8] se tiene en cuenta el saldo por cobrar al final del horizonte (para las entregas que tienen lugar en los últimos periodos del horizonte). En [9] se considera el saldo inicial de cuentas por cobrar (entregas realizadas con anterioridad al inicio del horizonte de planificación). De forma análoga, en las ecuaciones [10] a [12] se relacionan las facturas de los proveedores (que dependen de las necesidades de producción) con los pagos, incluyendo la posibilidad de descuento por pronto pago.

En las ecuaciones [13] a [16] se establece el tamaño de la plantilla, en función de las bajas ya programadas y de las posibles contrataciones y despidos. En la ecuación [17] se calcula el tamaño de plantilla efectivo en función del tamaño real y de la experiencia del personal (teniendo en cuenta que los que ya estaban pueden haber aumentado su rendimiento y que los nuevos necesitan un periodo de aprendizaje). La ecuación [18] limita el número de trabajadores temporales que se puede contratar. La ecuación [19] determina el coste por despidos no programados, de trabajadores que pertenecen a la plantilla inicial. La ecuación [20] impone que no se despida más de una vez a un mismo trabajador. En la ecuación [21] se determina el saldo de la cuenta de horas, teniendo en cuenta las horas de más y las horas de menos realizadas por los trabajadores en cada periodo. En las ecuaciones [22] y [23] se determina el coste que se debe pagar al trabajador dado de baja, por las horas de más realizadas (saldo positivo de su cuenta de horas). En las ecuaciones [24] a [26] se determina el número de trabajadores, contratados en un cierto periodo del horizonte temporal, que se despiden en un periodo dado. Se garantiza que no se puede despedir un trabajador que ya fue despedido y, además, que no se pueden despedir más trabajadores de los que han sido contratados. En las ecuaciones [27] a [29] se limitan las horas de más que pueden hacer todos los trabajadores, y se determina el saldo de la cuenta de horas de los trabajadores contratados dentro del horizonte. En [30] se determina la cantidad a pagar por el despido de trabajadores contratados (la indemnización más las horas de más trabajadas). En las ecuaciones [31] a [33] se indica la cantidad de trabajadores temporales que se contratan por periodo, y se determina el coste a pagar por la contratación de los trabajadores temporales necesarios y las horas de más que hayan realizado. En las ecuaciones [34] a [36] se limita la cantidad de horas extras que pueden hacer los trabajadores por periodo y el total en el horizonte temporal.

La ecuación [37] impone que para tener acceso a una cuenta de crédito que está relacionada a otra anterior y para gozar de costes fijos de tramitación iguales a cero, se debe tener contratada la cuenta anterior, que al finalizar el plazo de vencimiento da lugar a la nueva cuenta de crédito. En las ecuaciones [38] a [41] se determina el balance por periodo del saldo

dispuesto, del importe nominal, en cada cuenta de crédito abierta. La ecuación [42] impone los límites máximos y mínimos del importe nominal que puede solicitarse en cada cuenta de crédito. En las ecuaciones [43] y [44] se establecen los balances de los títulos al descuento, teniendo en cuenta las inversiones y las ventas de dichos títulos. La ecuación [45] limita la cantidad máxima y mínima que se puede invertir en títulos al descuento.

Por último, la ecuación [46] determina el beneficio sujeto a las retenciones para el pago del Impuesto de Sociedades.

#### 4. Experiencia computacional

- La experiencia computacional (llevada a cabo con un PC y el optimizador comercial ILOG CPLEX 11) considera diversos escenarios para comprobar la posibilidad de resolver eficientemente el modelo bajo supuestos realistas.

#### Referencias

Boiteux, O.D., Corominas, A. y Lusa, A. (2007a). “Estado del arte sobre planificación agregada de la producción”. *Working Paper IOC-CT-P-2007-04*. Universitat Politècnica de Catalunya.

Boiteux, O.D., Corominas, A. y Lusa, A. (2007b). “La planificación agregada como instrumento integrador de las áreas funcionales de la empresa: Estado del arte y perspectivas”. *XI Congreso de Ingeniería de Organización. Internacional Conference on Industrial Engineering and Industrial Management*. Madrid.

Boiteux, O.D., Corominas, A., Lusa, A. y Martínez, C. (2008). “Modelo de planificación agregada de la producción, la plantilla, el tiempo de trabajo y la tesorería”. *Working Paper IOC-DT-P-2008-06*. Universitat Politècnica de Catalunya.

Corominas, A.; Lusa, A.; Pastor, R. (2007a). “Planning annualised hours with a finite set of weekly working hours and cross-trained workers”. *European Journal of Operational Research*, 176(1):230-239.

Corominas, A.; Lusa, A.; Olivella, J. (2007b). “Planificación del tiempo de trabajo con cuentas de horas: el caso industrial”. *XI Congreso de Ingeniería de Organización. Internacional Conference on Industrial Engineering and Industrial Management*. Madrid, (próxima publicación en Dirección y Organización).

Holt, C.C.; Modigliani, F. y Simon, H.A. (1955). “A linear decision rule for production and employment scheduling”. *Management Science*, 2(1):1-30.

Kirca, O. y Köksalan, M.M. (1996). “An integrated production and financial planning model and an application”. *IIE Transactions*, 28:677-686.