II International Conference on Industrial Engineering and Industrial Management
XII Congreso de Ingeniería de Organización
September 3-5, 2008, Burgos, Spain

Modelos de Líneas de Espera con Datos Inciertos: aplicación de la metodología de *Prade* a los sistemas con disciplina de prioridad

María José Pardo[1], David de la Fuente[2]

[1] Dpto. de Economía Aplicada. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad del País Vasco. Avda. Lehendakari Aguirre 83, 48015. Bilbao. mjose.pardo@ehu.es
[2] Dpto. de Administración de Empresas y Contabilidad. Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Gijón. Universidad del Oviedo. Campus de Viesques, s/n 33204. Gijón. david@uniovi.es

Resumen

En este trabajo presentamos dos modelos de líneas de espera a los cuales les incorporamos una disciplina de prioridad posibilista. Para el estudio y desarrollo de los modelos tomamos como punto de partida la metodología expuesta por Prade (1980) sobre modelos posibilistas para sistemas de colas. Excepto en dicho trabajo de Prade no encontramos en la literatura referente a modelos de líneas de espera con datos inciertos ningún artículo que utilice y adapte su método para incorporar en los modelos de líneas de espera una disciplina de prioridad posibilista.
Para verificar la validez de la metodología propuesta calculamos la distribución de posibilidad de la disciplina de espera, y la distribución de posibilidad del tiempo de permanencia en cola, en dos modelos de líneas de espera diferentes: el modelo de colas determinista puro $D/D/1$ *y el modelo de colas clásico* $M/M/1$.
Con la incorporación de datos inciertos en los modelos de líneas de espera, datos que son conocidos de manera aproximada a través de distribuciones de posibilidad, ampliamos el campo de aplicación de los modelos de colas con disciplina de prioridad.

Palabras clave: Modelos de Líneas de Espera, Teoría de Posibilidad, Números Fuzzy

1. Introducción

En los modelos de líneas de espera se tiene una característica aleatoria que es el proceso estocástico que modela las llegadas. Estos sistemas pueden tener incertidumbre cuya naturaleza es, en muchas ocasiones, más posibilista que probabilista. Los tiempos de servicio, por otro lado, pueden ser sólo aproximadamente conocidos, dado que su valor depende de restricciones difíciles de explicitar de forma precisa. Además, es posible que la disciplina de espera del sistema no esté establecida de manera completa y precisa, porque existan algunas excepciones o perturbaciones. Tales modelos de líneas de espera son bastante reales en situaciones diarias.

En este trabajo hemos modelado dos sistemas de líneas de espera a los cuales les incorporamos una disciplina de prioridad posibilista. Para el desarrollo de los sistemas seguimos la metodología expuesta por *Prade* (1980, pp. 147-153) sobre modelos posibilistas para sistemas de colas. Excepto dicho trabajo de *Prade* no hemos encontrado en la literatura referente a modelos de colas con datos inciertos ningún artículo que utilice y desarrolle su método para incorporar incertidumbre en los modelos de líneas de espera con disciplina de prioridad. Así, por ejemplo, los trabajos de Li y Lee (1989) y Negi y Lee (1992), o más recientemente de Chen (2007) o Pardo y de la Fuente (2008) entre otros, estudian los modelos de líneas de espera con datos inciertos mediante el principio de extensión de Zadeh (1965), y en Pardo y de la Fuente (2007) se estudia la optimización de un modelo de colas fuzzy con disciplina de prioridad pero también a través del principio de extensión de Zadeh.

2. Cálculo de la distribución de posibilidad de la disciplina de prioridad incierta

La disciplina de prioridad posibilista indica la posibilidad que tiene la unidad *n*-ésima, que accede a las instalaciones en la posición *n* de la línea de espera, de ser servida en una posición diferente de *n*, o bien adelantada o bien retrasada. Para poder desarrollar los modelos propuestos en este trabajo hemos definido una distribución de posibilidad para la disciplina de espera, pero ésta puede ser calculada a través de los diferentes métodos existentes para construir distribuciones de posibilidad a partir de datos obtenidos de diversas fuentes o de expertos (por ejemplo en Dubois *et al* (1999), pp. 335-401).

Por ello, hemos definido la siguiente distribución de posibilidad (que denotaremos μ_i^n) y que proporciona la posibilidad de que la unidad que ha llegado en la posición *n* pase a ser servida en la posición $n+i$. Lógicamente ésta es válida cuando a la llegada de una unidad a las instalaciones en ellas hay una longitud de cola de una o más unidades, según sea el caso, además, por simplicidad, la distribución de posibilidad de la disciplina de espera se va a considerar independiente de la unidad *n*. Así, la posibilidad de que la unidad *n* adelante su posición en la cola es definida de la siguiente manera:

- Posibilidad de ser servida en la posición de llegada *n*: $\mu_0^n = 1$.
- Posibilidad de ser servida en la posición $n-1$: $\mu_{-1}^n = \sigma_1 \left(\sigma_1 \leq 1\right)$
- Posibilidad de ser servida en la posición $n-2$: $\mu_{-2}^n = \sigma_2 \left(\sigma_2 \leq 1\right)$ (en este caso consideramos que la unidad $n-1$ y la unidad $n-2$ retroceden una posición en la cola).
- Posibilidad de ser servida en la posición $n+i$ con $i = -3, -4, \ldots$: $\mu_i^n = 0$. Así una unidad no puede adelantar en más de dos posiciones su lugar en la línea de espera.

A partir de estas hipótesis a continuación hemos calculado la posibilidad de que una unidad que espera en la cola vea retrasada su posición en la línea de espera por la llegada de una unidad con prioridad superior, así:

- Hay dos motivos por los que la unidad *n* puede retrasar en una su posición en la línea de espera:

i. Porque la unidad $n+1$ adelante a la unidad *n*, lo cual ocurre o bien porque la unidad $n+1$ tiene prioridad para adelantar una posición en la cola o bien porque la unidad $n+1$ tiene prioridad para adelantar dos posiciones en la cola. La posibilidad del evento "la unidad $n+1$ adelanta a la unidad *n*" es la unión de los dos eventos anteriores que, por lógica difusa, se sabe que tiene un valor de verdad (la posibilidad de la unión de dos eventos es el máximo de las posibilidades de los eventos- Zimmermann, 2001): $\max\left\{\sigma_1, \sigma_2\right\}$.

ii. Si la unidad $n+1$ no tiene prioridad superior la unidad *n*, pero la unidad $n+2$ tiene prioridad superior a las unidades *n* y $n+1$ y adelanta en dos su posición, por lo tanto las unidades *n* y $n+1$ retroceden en uno, y esto ocurre con un grado de posibilidad σ_2.

Luego el grado de posibilidad de que la unidad *n* retroceda en una su posición de llegada al sistema es la unión de los eventos anteriores, y por lógica difusa (Zimmermann, 2001):

$$\mu_1^n = \max\left\{\max\left\{\sigma_1,\sigma_2\right\},\sigma_2\right\} = \max\left\{\sigma_1,\sigma_2\right\} \tag{1}$$

1. La unidad *n* puede retroceder en dos su posición de llegada al sistema si retrocede consecutivamente dos veces, es decir, si el evento "la unidad *n* retrocede en una posición" ocurre dos veces, lo que por lógica difusa tiene un valor de verdad (la posibilidad de la intersección de dos eventos es el mínimo de las posibilidades de los eventos- Zimmermann, 2001):

$$\mu_2^n = \min\left\{\mu_1^n,\mu_1^n\right\} = \mu_1^n = \max\left\{\sigma_1,\sigma_2\right\} \tag{2}$$

2. De igual forma se puede calcular el grado de posibilidad de que la unidad *n* retroceda en 3 ó más su posición en la línea de espera, y en todos ellos se tiene:

$$\mu_i^n = \max\left\{\sigma_1,\sigma_2\right\}, \quad i = 3,4,... \tag{3}$$

Luego el grado de posibilidad de que la unidad *n* retroceda su posición en la línea de espera, independientemente del número de posiciones, es:

$$\mu_i^n = \max\left\{\sigma_1,\sigma_2\right\}, \quad i = 1,2,... \tag{4}$$

Con todo, la distribución de posibilidad de la disciplina de prioridad es:

$$\mu_i^n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = -3,-4,... \\ \sigma_2 & \text{si} \quad i = -2 \\ \sigma_1 & \text{si} \quad i = -1 \\ 1 & \text{si} \quad i = 0 \\ \max\left\{\sigma_1,\sigma_2\right\} & \text{si} \quad i = 1,2,... \end{cases} \tag{5}$$

Conocida μ_i^n a continuación hemos calculado la distribución de posibilidad de la medida de efectividad "tiempo de permanencia en cola de la unidad *n*", que denotamos $\tilde{W}_q^n$, de la siguiente manera:

- Si la unidad *n* adelanta dos veces su posición no tiene que esperar, sobre su tiempo total de permanencia en la cola, al servicio de las unidades $n-2$ y $n-1$, y hay que restar el tiempo de servicio de ambas unidades.

- Si adelanta una vez su posición, al tiempo de permanencia hay que restarle el servicio de la unidad $n-1$.

- Si mantiene su puesto de llegada su tiempo de permanencia en cola no resulta cambiado.

- Si retrasa su posición en la cola tiene que esperar, además de su tiempo de permanencia, tantos tiempos de servicio como unidades se le adelanten.

Si se denota por b el tiempo de servicio de una unidad y usando la notación de Zadeh (1968) para denotar un número fuzzy (el grado de posibilidad es anterior al símbolo "/", el valor posible es posterior, y el símbolo "+" representa la unión), la distribución de posibilidad del tiempo de permanencia en cola de la unidad n, es:

$$\tilde{W}_q^n = \mu_{-2}^n / \left(W_q^n - 2b\right) + \mu_{-1}^n / \left(W_q^n - b\right) + \mu_0^n / W_q^n + \mu_1^n / \left(W_q^n + b\right) + \mu_2^n / \left(W_q^n + 2b\right) + ... \qquad (6)$$

Dependiendo de las características particulares del modelo de líneas de espera al que se le incorpore esta disciplina de prioridad posibilista se obtienen unos resultados que difieren entre los distintos modelos. En los apartados siguientes mostramos con dos sistemas de líneas de espera con disciplina de prioridad posibilista los resultados teóricos obtenidos.

3. Modelo de colas determinista D/D/1 con tiempo entre llegadas mayor que el tiempo de servicio y disciplina de prioridad posibilista

En el modelo de colas determinista las unidades acceden al sistema con tiempo entre llegadas constante y son servidos con tiempos también constantes. Se supone que el sistema se organiza de tal manera que las llegadas ocurren a intervalos regulares y son servidas en un único canal también regularmente. La fuente de llegada se considera ilimitada y no hay limitación en la capacidad de las instalaciones.

En Saaty (1967) se analiza el modelo de colas puramente determinista $D/D/1$ en estado transitorio. Esto significa que las condiciones iniciales (número de unidades que hay en el sistema en el instante inicial) inciden en los resultados a obtener en el modelo. Adicionalmente, Saaty estudia el sistema con tiempo entre llegadas mayor que el tiempo de servicio. Esta condición supone que las unidades acceden a las instalaciones con un intervalo de tiempo mayor que el tiempo de servir, por ello no habrá jamás cola si cuando se inicia el sistema en él hay cero unidades (condición inicial $I = 0$ cuando $t = 0$). Cada unidad que accede al sistema es servida antes que la llegada de la siguiente. Saaty, por ello, estudia el modelo determinista suponiéndolo capaz de vaciarse (no se acumulan unidades en el sistema) bajo las condiciones iniciales de existencia de I unidades en las instalaciones en el momento inicial.

Para conocer la evolución de este sistema y calcular la medida de efectividad hay que analizar el comportamiento de esta línea de espera. Cuando comienza a funcionar, en el sistema se encuentran I unidades y como es capaz de ir absorbiendo las sucesivas llegadas (se sirve muy rápido) entonces se alcanzará un instante (que denotaremos T) en el que ya no quedarán unidades en el sistema y a cada nueva unidad que llegue se le servirá antes de la llegada de la siguiente. En T el sistema alcanza el *estado estable*: el servidor queda ocioso hasta una nueva llegada, no hay unidades en cola y el tiempo de permanencia en cola de las nuevas unidades es cero. Para definir completamente el sistema necesitamos calcular el número de unidades que acceden a las instalaciones antes de T (que denotaremos por A y son las unidades que tienen que permanecer en cola junto con las I iniciales).

Respecto a la medida de efectividad "tiempo de permanencia en cola de la unidad *n*", W_q^n Saaty no la calcula para los diferentes valores de *n*. De aquí que en primer lugar, y antes de incorporarle una disciplina de prioridad posibilista, vamos a calcular la variable *A* y la medida de efectividad W_q^n . Se denota por:

a: tiempo entre sucesivas llegadas,

b: tiempo de servicio,

I: número de unidades en el sistema en el instante inicial (incluye a la unidad que accede al sistema en el instante inicial más las unidades que ya permanecían en él). El caso $I=1$ significa que a la llegada de la primera unidad el sistema estaba vacío.

El sistema alcanza el estado estable en *T* una vez el servidor ha atendido a las *I* unidades iniciales y a las nuevas llegadas *A*. La llegada $A+1$ es la primera que encuentra al servidor libre y pasa directamente a ser atendida. Esta llegada ocurre en $(A+1)a$. De aquí que el momento en que llegue la unidad $A+1$ tiene que ser superior al tiempo de atender a las $I+A$ unidades, de otra forma no es posible que dicha llegada encuentre el sistema libre. Luego:

$$(A+1)a > (I+A)b \Leftrightarrow A > \frac{Ib-a}{a-b} \tag{7}$$

La variable *A* tiene que ser el primer número entero que cumple la expresión anterior, así:

$$A = \left[\frac{Ib-a}{a-b}\right]+1 = \left[\frac{b(I-1)}{a-b}\right] \tag{8}$$

donde $[x]$ representa la parte entera del número *x*.

La medida de efectividad tiempo de permanencia en cola de la unidad *n*, W_q^n toma el valor:

$$W_q^n = \begin{cases} (n-1)b & \text{si} \quad n \le I \\ (n-1)b-(n-I)a & \text{si} \quad I < n \le I+A \\ 0 & \text{si} \quad n > I+A \end{cases} \tag{9}$$

Al resultado (9) se llega desde el siguiente razonamiento:

Sea $T_{ll}^n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \le I \\ (n-I)a & \text{si} \quad n > I \end{cases}$ el tiempo de llegada al sistema de la unidad *n* y sea $T_s^n = \begin{cases} (n-1)b & \text{si} \quad n \le I+A \\ (n-I)a & \text{si} \quad n > I+A \end{cases}$ el tiempo en que es servida la unidad *n*, entonces $W_q^n = T_s^n - T_{ll}^n$.

3.1. Ejemplo

Conocido el comportamiento del modelo de líneas de espera determinista, a continuación mostramos con una aplicación práctica la incorporación de una disciplina de prioridad posibilista en el modelo $D/D/1$, calculando la distribución de posibilidad del tiempo de permanencia en cola para cada uno de las unidades que a su llegada al sistema tiene que permanecer en línea de espera, para un sistema de líneas de espera con tiempo entre llegadas de 30 min., tiempo de servicio de 20 min., 8 unidades iniciales y con la distribución de posibilidad de la disciplina de espera: $\mu_{-2}^{n}=0.2$; $\mu_{-1}^{n}=0.4$ y $\mu_{0}^{n}=1$, de donde se tiene que $\mu_{i}^{n}=\max\{\sigma_1,\sigma_2\}=\max\{0.4,0.2\}=0.4$, $i=1,2,...$

En primer lugar, con los datos del ejemplo es: $I=8$, $A=14$, y:

$$T_{ll}^{n}=\begin{cases}0 & \text{si} \quad n\le 8\\ (n-8)30 & \text{si} \quad n>8\end{cases} \qquad T_{s}^{n}=\begin{cases}(n-1)20 & \text{si} \quad n\le 22\\ (n-8)30 & \text{si} \quad n>22\end{cases}$$

$$W_{q}^{n}=\begin{cases}(n-1)20 & \text{si} \quad n\le 8\\ (n-1)20-(n-8)30 & \text{si} \quad 8<n\le 22\\ 0 & \text{si} \quad n>22\end{cases} \tag{10}$$

Dadas las características del sistema, hay que hacer las siguientes observaciones antes de pasar a calcular la distribución de posibilidad del tiempo de permanencia en cola del cliente *n*:

- Por la evolución de este sistema existe una unidad $I<N\le I+A$ ($8<N\le 22$) que cumple que toda unidad $n>N$ es servida antes de la llegada de la siguiente unidad y por ello no es posible que la unidad $n+1$ adelante a la unidad *n*. Es decir, si se denota por T_s^N al instante en que la unidad *N* es servida, y por T_{ll}^{N+1} el tiempo de llegada de la unidad $N+1$, entonces *N* es la primera unidad que cumple: $T_s^N<T_{ll}^{N+1}$, por lo que no hay posibilidad de que la posición de *n* sea retrasada en la línea de espera, así $\mu_j^n=0$, $j=1,2,...$ y $n>N$, con:

$$T_s^N=(N-1)20<(N+1-8)30=T_{ll}^{N+1} \tag{11}$$

De aquí obtenemos $N>19$, luego en el ejemplo es $N=20$. De esta forma se llega:

1. Si $n<20$ es $\mu_j^n=0.4$ con $j=1,2,...,20-n$ y $\mu_j^n=0$ con $j=20-n+1,....$
2. Si $n\ge 20$ es $\mu_j^n=0$ con $j=1,2,...$
3. Y si desde la unidad 20 no es posible retroceder en la línea de espera, entonces desde la unidad 21 y siguientes no es posible adelantar en la línea, luego si $n\ge 21$ es $\mu_{-2}^n=\mu_{-1}^n=0$.

- Las posibilidades μ_{-2}^n y μ_{-1}^n cuando $n\le 20$ dependen de la unidad *n*:

1. Sea $n=1$, es decir, la primera unidad en el sistema, entonces: $\mu_{-2}^1=\mu_{-1}^1=0$.

2. Sea $n=2$, entonces: $\mu_{-2}^{2}=0$ y $\mu_{-1}^{2}=0.4$, dado que la unidad segunda llega a la vez que la unidad primera y existe la posibilidad de que adelante su posición en la línea de espera.
3. Sea $3 \le n \le I = 8$, son unidades que acceden a las instalaciones en el instante cero y para todas existe la posibilidad de cambiar su posición adelantando en una o dos unidades en la línea de espera, entonces: $\mu_{-2}^{n}=0.2$ y $\mu_{-1}^{n}=0.4$
4. Si $9 \le n \le 20$ sabemos por las características de este sistema, que la línea de espera disminuye para cada nueva unidad que accede, por lo que para las últimas llegadas es posible que el nivel de cola sea inferior a 2 ó a 1 unidad y no puedan adelantar su posición en dos o en un puesto, respectivamente. Para determinar cuales son las unidades que pueden hacer efectiva su prioridad, seguimos el siguiente razonamiento: Sea la unidad N_1 con prioridad para adelantar en dos su posición en la línea de espera, para poder hacer efectiva esta prioridad el tiempo de llegada de la unidad N_1 debe ser menor o igual al tiempo de pasar a ser servida la unidad $N_1 - 2$ (unidad anterior a N_1 en dos posiciones) para poder ocupar su posición, así $T_{ll}^{N_1} \le T_{s}^{N_1 - 2}$, y de aquí se llega a $N_1 \le 18$. Y sea la unidad N_2 con prioridad para adelantar en una su posición en la línea de espera, que, de igual forma puede hacer efectiva esta prioridad si el tiempo de llegada de la unidad N_2 es menor o igual al tiempo de pasar a ser servida la unidad $N_2 - 1$ (unidad anterior a N_2 en una posición), así $T_{ll}^{N_2} \le T_{s}^{N_2 - 1}$, de donde es $N_2 \le 20$. Así:
   i. Sea $9 \le n \le 18$, entonces $\mu_{-2}^{n}=0.2$ y $\mu_{-1}^{n}=0.4$
   ii. Sea $19 \le n \le 20$, entonces $\mu_{-2}^{n}=0$ y $\mu_{-1}^{n}=0.4$

Con todo lo anterior calculamos la distribución de posibilidad del tiempo de permanencia en cola de la unidad *n*, $\tilde{W}_q^n$:

$$\begin{aligned}\tilde{W}_q^n &= \mu_{-2}^{n} / \left(W_q^n - 40\right) + \mu_{-1}^{n} / \left(W_q^n - 20\right) + 1 / W_q^n + \mu_{1}^{n} / \left(W_q^n + 20\right) + \\ &+ \mu_{2}^{n} / \left(W_q^n + 40\right) + \ldots + \mu_{20-n}^{n} / \left(W_q^n + \left(20-n\right)20\right)\end{aligned} \tag{12}$$

A continuación ilustramos para algunos valores de *n* esta distribución de posibilidad:

$$\begin{aligned}\tilde{W}_q^1 &= 1/0 + 0.4/20 + \ldots + 0.4/380 \\ \tilde{W}_q^2 &= 0.4/0 + 1/20 + 0.4/40 + \ldots + 0.4/380 \\ \tilde{W}_q^8 &= 0.2/100 + 0.4/120 + 1/140 + 0.4/160 + \ldots + 0.4/380 \\ \tilde{W}_q^{15} &= 0.2/30 + 0.4/50 + 1/70 + 0.4/90 + \ldots + 0.4/170 \\ \tilde{W}_q^{20} &= 0.4/0 + 1/20 \\ \tilde{W}_q^{21} &= 1/10 \\ \tilde{W}_q^{n} &= 1/0 \quad \text{si} \quad n \ge 22\end{aligned} \tag{13}$$

Tal como se ha adaptado la disciplina de prioridad posibilista al modelo de líneas de espera determinista $D/D/1$, con tiempo entre llegadas mayor que el tiempo de servicio, se puede incorporar a otros modelos de colas deterministas sin más que tener en cuenta las características del modelo y la evolución de la línea de espera.

4. Modelo de colas clásico M/M/1 con disciplina de prioridad posibilista

Sea un modelo de líneas de espera clásico $M/M/1$, con tiempos entre llegadas y tiempos de servicio conocidos, y que se distribuyen de acuerdo a una exponencial de parámetros λ y μ respectivamente, iguales para todos las unidades, independientemente de su clase de prioridad. No hay restricciones en la capacidad del sistema, y dispone de una fuente de entrada ilimitada.

El sistema es analizado en estado estable, por lo que conocemos las probabilidades de que el sistema esté desocupado (Winston, 2003), $P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$ y de que se encuentren *n* unidades en el sistema, $P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n$ con $n = 1, 2, ...$, así como el tiempo medio de permanencia en cola de cada unidad, $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$.

Para incorporar la disciplina de prioridad posibilista indicada anteriormente hay que tener en cuenta que en los modelos de colas estocásticos no se conoce con certeza el instante en que una unidad llega al sistema, ni cuál es la longitud de la cola cuando la unidad accede, ni si después pueden llegar otra u otras unidades que la hagan retroceder. Por ello, hay que calcular la *posibilidad media* de avanzar 1 ó 2 puestos, de mantenerse en su posición de llegada o de retroceder en la misma:

1. Cuando una unidad accede al sistema, si tiene prioridad para adelantar a 2 unidades y además hay una línea de espera de 2 ó más unidades en cola (luego 3 unidades ó más en el sistema), se hará efectiva la disciplina de prioridad. La posibilidad para adelantar a dos unidades es μ_{-2} y la probabilidad de que en el sistema se encuentren 3 ó mas unidades es $P_{n \geq 3} = 1 - P_0 - P_1 - P_2$. Por ello, la *posibilidad media* de que una unidad avance su posición en la cola en 2 puestos, que denotaremos p_{-2}, ocurre cuando se dan a la vez los dos eventos anteriores, y utilizando la definición de Zadeh (1968) de probabilidad de evento fuzzy, es $p_{-2} = \mu_{-2} \cdot P_{n \geq 3}$.
2. Con un razonamiento similar al anterior, se llega a que la *posibilidad media* de que una unidad avance su posición en 1 puesto es: $p_{-1} = \mu_{-1} \cdot P_{n \geq 2}$, con $P_{n \geq 2} = 1 - P_0 - P_1$.
3. La posibilidad de permanecer en su posición en la línea de espera ocurre siempre, independientemente del número de unidades que hay en el sistema en el instante de llegada de la unidad, luego: $p_0 = \mu_0 = 1$.
4. La *posibilidad media* de retroceder en la cola, p_i con $i = 1, 2, ...$ ocurre cuando la unidad tiene que esperar para ser atendida, ya que mientras tanto puede llegar otra unidad con prioridad superior. Una unidad tiene que esperar si cuando llega el sistema está ocupado, lo que ocurre con probabilidad $P_{n>0} = 1 - P_0$, entonces $p_i = \mu_i \cdot P_{n>0}$.

Conocida la *posibilidad media* de avanzar o retroceder en la línea de espera, la distribución de posibilidad del tiempo medio de permanencia en cola $\tilde{W}_q$ es:

$$\tilde{W}_q = p_{-2} / \left(W_q - 2/\mu\right) + p_{-1} / \left(W_q - 1/\mu\right) + p_0 / W_q + p_1 / \left(W_q + 1/\mu\right) + p_2 / \left(W_q + 2/\mu\right) + ... \qquad (14)$$

4.1. Ejemplo

Para terminar, ilustramos con un ejemplo la incorporación de una disciplina de prioridad posibilista, calculando la distribución de posibilidad del tiempo medio de permanencia en cola para un modelo de líneas de espera clásico $M/M/1$ de parámetros $\lambda = 3$ y $\mu = 4$. La distribución de posibilidad de la disciplina de espera es: $\mu_{-2} = 0.3$, $\mu_{-1} = 0.5$ y $\mu_0 = 1$. De aquí: $\mu_i = \max\{0.5, 0.3\} = 0.5$, con $i = 1,2,...$

Con estos datos calculamos y obtenemos: $P_0 = 0.25$, $P_1 = 0.1875$ y $P_2 = 0.1406$, luego $P_{n\geq 3} = 0.4219$, $P_{n\geq 2} = 0.5625$ y $P_{n>0} = 0.75$. La *posibilidad media* de avanzar o retroceder en la línea de espera es: $p_{-2} = 0.1265$, $p_{-1} = 0.2812$, $p_0 = 1$ y $p_i = 0.375$ con $i = 1,2,...$ El tiempo medio de permanencia en cola de una unidad es: $W_q = 0.75$. Y la distribución de posibilidad del tiempo medio de permanencia en cola es:

$$\tilde{W}_q = 0.1265/0.25 + 0.2812/0.5 + 1/0.75 + 0.375/1 + 0.375/1.25 + ... \qquad (15)$$

En la figura 1 está representada la distribución de posibilidad $\tilde{W}_q$.

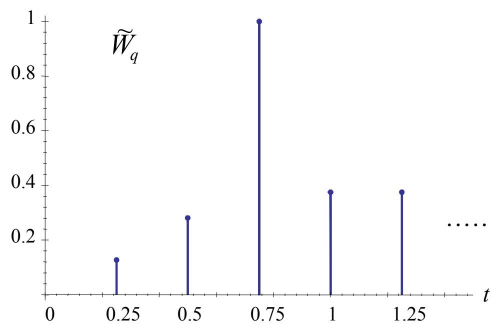

Figura 1. Distribución de posibilidad $\tilde{W}_q$

La disciplina de prioridad posibilista puede adaptarse a otros sistemas de líneas de espera estocásticos sin más que seguir un procedimiento similar al efectuado en este último ejemplo.

5. Conclusiones

En este trabajo hemos proporcionado una representación más realista de los modelos de líneas de espera al incorporarles una disciplina de prioridad posibilista tomando como punto de partida el trabajo iniciado por *Prade* (1980). Para ello hemos definido una distribución de posibilidad para la disciplina de espera, pero puede ser calculada a partir de datos reales o de la opinión de expertos. Para ilustrar el método propuesto y los resultados teóricos obtenidos realizamos dos aplicaciones, una para incorporar la disciplina de prioridad posibilista en un modelo de líneas de espera determinista puro y otra para incorporar la disciplina de espera incierta en un modelo de líneas de espera clásico. En ambas aplicaciones en primer lugar desarrollamos la técnica para incorporar la disciplina de prioridad dadas las características particulares del sistema y, en segundo lugar, realizamos un ejemplo que aclara la metodología propuesta.

Con todo, los modelos de líneas de espera con disciplina de prioridad posibilista presentados y desarrollados en este trabajo proporcionan al agente decisor unos resultados más completos e informativos, así como un mayor conocimiento sobre el comportamiento del sistema debido a que los resultados son distribuciones de posibilidad que incluyen toda la incertidumbre contenida en el sistema. Además, es una metodología sencilla que puede ser adaptada a los diferentes modelos de líneas de espera con disciplina de prioridad incierta. Por ello pensamos que los modelos de líneas de espera con datos inciertos propuestos en este trabajo pueden tener más aplicaciones que los sistemas clásicos.

Referencias

Chen, S.P. (2007). “Solving fuzzy queuing decision problems via a parametric mixed integer nonlinear programming method”. *European Journal of Operational Research*, 177(1):445-457.

Dubois, D.; Prade, H.M.; Yager, R.R. (1999). “Merging fuzzy information”. En *Fuzzy Sets in Aproximate Reasoning and Information Systems*. Kluwer. Boston.

Li, R.J.; Lee, E.S. (1989). “Analysis of Fuzzy Queues”. *Computers and Mathematics with Applications*, 17(7):1143-1147.

Negi, D.S.; Lee, E.S. (1992). “Analysis and simulation of fuzzy queues”. *Fuzzy Sets and Systems*, 46:321-330.

Pardo, M.J.; de la Fuente, D. (2007). “Optimizing a priority-discipline queuing model using fuzzy set theory”. *Computers and Mathematics with Applications*, 54(2):267-281.

Pardo, M.J.; de la Fuente, D. (2008). “Optimal selection of the service rate for a finite input source fuzzy queuing system”. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(3):325-342.

Prade, H.M. (1980). “An outline of fuzzy or possibilistic models for queuing systems”. En Wang, P.P y Chang, S.K. (eds.), *Fuzzy Sets: Theory and Applications to Policy Analysis and Information Systems*. New York:Plenum Press.

Saaty, T.L. (1983). *Elements of queuing theory with applications*. New York. Dover.

Winston, W.L. (2003). *Operations Research: Applications and Algorithms*, 4th ed.Duxbury Press. Boston.

Zadeh, L.A. (1965). “Fuzzy sets”. *Information and control*, 8:338-353.

Zadeh, L.A. (1968). “Probability measures of fuzzy events”. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 23:421-427.

Zimmermann, H.J. (2001). *Fuzzy Set Theory and its applications*, 4th ed. Kluwer. Boston.