

Modelo DEA centralizado con objetivos parciales a alcanzar

Gabriel Villa¹, David Canca¹

¹ Dpto. de Organización Industrial y Gestión de Empresas. Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Sevilla. Universidad de Sevilla. Av. De los Descubrimientos, sn, 41092. Sevilla. gvilla@esi.us.es, dco@us.es

Palabras clave: DEA, modelos centralizados, determinación de objetivos, AHP

1. Introducción

DEA es una herramienta basada en programación matemática que evalúa la eficiencia relativa de unidades productivas (Cooper et al. 2000). Habitualmente los estudios están centrados en determinar cuál es el cambio que debe producirse en la unidad productiva tanto en sus entradas como en sus salidas para conseguir la eficiencia. Sin embargo, existen situaciones en las que las empresas tienen una estimación de los objetivos que la unidad debe alcanzar en los recursos consumidos y /o en los productos generados. Este escenario es habitual en empresas con estructura multinivel (Multi-Unit multi-Level Organisations, ver Ruefli, 1974; Nijkamp y Rietveld, 1981) donde una entidad central administra los recursos de las unidades dependientes, con lo que tiene conocimiento de las posibles mejoras que pueden esperarse en periodos posteriores (en función del comportamiento del mercado, de la competencia, etc.), y tiene la misión de exigir a dichas unidades el cumplimiento de estas previsiones.

Se propone en este artículo la introducción de modelos DEA que integren y resuelvan la situación expuesta: un escenario con estructura multinivel en donde la entidad superior busca la mejora en el funcionamiento de las unidades productivas a su cargo, estableciendo a su vez unos objetivos a alcanzar en el consumo de ciertos recursos y en la generación de ciertos productos. La imposición de estos objetivos se efectuará con diferentes preferencias dependiendo del recurso o producto de que se trate.

El artículo, por tanto, contendrá los siguientes apartados. Se realizará una revisión bibliográfica sobre el tema, repasando los trabajos referidos a modelos DEA centralizados y a los que han tratado la inclusión de objetivos a alcanzar. Posteriormente se introducirá el modelo DEA Centralizado con Establecimiento de Objetivos Parciales a Alcanzar (en su versión de orientación de salida). A continuación se resolverá el modelo aplicado al caso de una entidad bancaria con datos extraídos de la bibliografía.

2. Revisión bibliográfica

Los modelos que involucran una estructura multinivel no son muy frecuentes en la literatura DEA. Golany et al. (1993) fue el primero en presentar un modelo DEA basado en reasignación de recursos que determinaba de forma conjunta la proyección de las unidades presentes en el problema, y que era resuelto mediante un método heurístico. Otros trabajos como los de Golany y Tamir (1995); Kumar y Sinha (1999) o Beasley (2003) contienen modelos con reasignación de recursos, todos ellos muy complejos y específicos. Finalmente, un modelo que se adapta al escenario centralizado, versátil y fácilmente resoluble es el desarrollado por Lozano y Villa (2004). A través de un único modelo,

calcula las proyecciones conjuntas de las unidades productivas presentes en el problema con una función objetivo común de reducción del total de las entradas (orientación input) o de amplificación del total de las salidas (orientación output).

Por otra parte, aunque hay algunos trabajos que han implementado objetivos a alcanzar, los modelos detectados no están desarrollados bajo un escenario de estructura multinivel (Thanassoulis y Dyson, 1992) o son complejos, basados en Goal Programming (Athanasopoulos, 1995), y no incluyen casos con articulación de preferencias por parte del decisor. Parece adecuado diseñar un modelo DEA con estructura centralizada que pudiera establecer objetivos a cumplir por las entradas y salidas del problema.

3. Modelo DEA centralizado con objetivos parciales a alcanzar

El modelo DEA propuesto es el que se muestra a continuación. Se especifica previamente la nomenclatura a utilizar:

j , r índices para las DMUs.

i índice para las entradas.

k índice para las salidas.

I^{Transf} conjunto de entradas transferibles cuya suma debe permanecer constante.

$I(r)$ conjunto de entradas con targets establecidos.

$O(r)$ conjunto de salidas con targets establecidos.

x_{ij} cantidad de entrada i consumida por DMU_j .

y_{kj} cantidad de salida k producida por DMU_j .

\hat{x}_{ij} solución de la fase I para la entrada i consumida por la DMU_j .

\hat{y}_{kj} solución de la fase I para la salida k producida por la DMU_j .

x_{ir}^{target} target establecido de la entrada i para la DMU_r .

y_{kr}^{target} target establecido de la salida k para la DMU_r .

u_{ij} peso o importancia de la entrada i consumida por la DMU_j .

v_{kj} peso o importancia de la salida k generada por la DMU_j .

$(\lambda_{1r}, \lambda_{2r}, \dots, \lambda_{nr})$ vector de variables para proyectar la DMU_r .

4. Fase I. Optimización de las entradas y salidas con targets establecidos.

En esta primera fase, el estudio se centra en las entradas y salidas con “targets” y se resuelve como un modelo aditivo centralizado adimensionalizado, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_r \sum_{i \in I(r)} u_{ir} \frac{h_{ir}^+}{x_{ir}^{\text{target}}} + \sum_r \sum_{k \in O(r)} v_{kr} \frac{h_{kr}^-}{y_{kr}^{\text{target}}} \\
\text{sa:} \quad & \\
& \sum_j \lambda_{jr} x_{ij} \leq \hat{x}_{ir} \quad \forall i, \forall r \\
& \sum_j \lambda_{jr} y_{kj} \geq \hat{y}_{kr} \quad \forall k, \forall r \\
& \hat{x}_{ir} \leq x_{ir} \quad \forall i \notin I^{\text{transf}}, \forall r \\
& \hat{y}_{kr} \geq y_{kr} \quad \forall k, \forall r \\
& \sum_r \hat{x}_{ir} \leq x_i^{\text{total}} \quad \forall i \in I^{\text{transf}} \\
& \sum_j \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \\
& \hat{x}_{ir} = x_{ir}^{\text{target}} - h_{ir}^- + h_{ir}^+ \quad \forall i \in I(r), \forall r \\
& \hat{y}_{kr} = y_{kr}^{\text{target}} + h_{kr}^+ - h_{kr}^- \quad \forall r \in O(r), \forall k \\
& h_{kr}^+, h_{ir}^-, h_{kr}^-, h_{ir}^+ \geq 0 \\
& \hat{x}_{ir}, \hat{y}_{kr} \geq 0; \lambda_{jr} \geq 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Los valores de los parámetros u y v en la función objetivo, representan las importancias relativas que se les imponen a cada entrada y salida contenida en el problema, y que serán determinadas mediante la técnica multiobjetivo AHP (Saaty, 1980). Esto hace conveniente la utilización de una función objetivo aditiva, que distinga las reducciones y ampliaciones de los recursos y los productos de forma independiente.

Se puede observar que las holguras h_{ir}^- y h_{kr}^+ no aparecen en la función objetivo. Esto es debido a que en esta primera fase se pretende conseguir valores de las entradas y las salidas que mejoren los valores de targets establecidos, sin pretensiones de estar próximo a éstos ni de proyectar las unidades sobre la frontera eficiente.

En el caso de que un target estuviera posicionado fuera de la tecnología del problema, serían las variables h_{ir}^+ y h_{kr}^- , las que establecerían un punto lo más cercano a dichos targets pero en la frontera eficiente.

En resumen, en esta primera fase se obtendrán los valores eficientes de las entradas y salidas con objetivos establecidos. Los valores de los parámetros u y v representan las importancias relativas que se les imponen a cada entrada y salida contenida en el problema, y que serán determinadas mediante la técnica multiobjetivo AHP (Saaty, 1980).

5. Fase II. Optimización de las entradas y salidas con y sin targets establecidos.

En esta segunda fase del modelo, se determinan los valores del resto de entradas y salidas, con targets o sin ellos. De esta forma, siendo,

α_{ir} disminución no radial de la entrada i consumida por DMU_r .

β_{kr} aumento no radial de la salida k producida por DMU_r .

\hat{x}_{ij} solución óptima de la fase II para la entrada i consumida por la DMU_j .

\hat{y}_{kj} solución óptima de la fase II para la salida k producida por la DMU_j.

El modelo queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \quad \sum_r \sum_i u_{ir} \alpha_{ir} + \sum_r \sum_k v_{kr} \beta_{kr} \\
 & \text{sa :} \\
 & \sum_j \lambda_{jr} x_{ij} \leq \hat{x}_{ir} \quad \forall i, \forall r \\
 & \sum_j \lambda_{jr} y_{kj} \geq \hat{y}_{kr} \quad \forall k, \forall r \\
 & \hat{x}_{ir} = (1 - \alpha_{ir}) \hat{x}_{ir} \quad \forall i, \forall r \\
 & \hat{y}_{kr} = (1 + \beta_{kr}) \hat{y}_{kr} \quad \forall r, \forall k \\
 & \sum_j \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \\
 & 0 \leq \alpha_{ir} \leq 1 \\
 & \beta_{kr} \geq 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

En esta segunda fase se ha desarrollado un modelo no radial que, teniendo en cuenta las preferencias estimadas para todas las entradas y salidas, determina a partir de los valores calculados en la anterior fase, las proyecciones definitivas sobre la frontera eficiente. Hay que hacer notar que no es necesaria la consideración de ninguna restricción centralizada, debido a que las entradas transferibles nunca tomarán un valor mayor al encontrado en la primera fase.

6. Aplicación al sector bancario

En este apartado se aplicará el modelo DEA Centralizado con Establecimiento de Objetivos a Alcanzar al estudio realizado por Silva Portela et al. (2003) consistente en 24 sucursales de una entidad bancaria. En primer lugar se analizará en detalle el problema, demostrando la idoneidad de la elección del modelo presentado en este artículo, para posteriormente resolver el modelo y obtener los resultados.

El problema considera como entradas los “costes de empleados” y “otros costes de operaciones” para cada sucursal; y como salidas, las “cuentas corrientes”, “créditos” e “ingresos por intereses”.

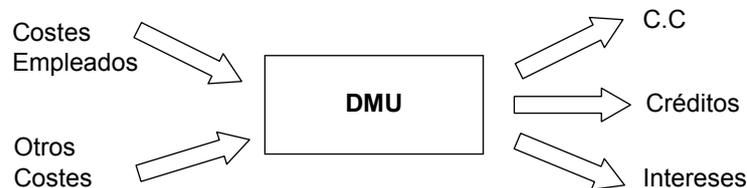


Figura 1. Representación de una unidad productiva en el caso estudiado en Silva Portela et al. (2003).

Debido a que la entidad bancaria asigna a cada una de las sucursales presentes en el problema los recursos “costes de empleados” y “costes de otras operaciones”, el planteamiento de un modelo centralizado es razonable.

Respecto a la elección de los retornos de escala en el problema, se ha asignado una tecnología VRS, teniendo en cuenta los valores que toman las entradas y salidas del

problema. En lo referente a la orientación del problema, la opción no radial parece adecuada si se plantea que algunas entradas y/o salidas son más susceptibles de ser mejoradas que otras con ciertas preferencias fijadas a priori. Por este motivo se ha implementado una función objetivo correspondiente a un modelo aditivo.

En la siguiente tabla se presentan los datos de entradas y salidas usados en el problema.

Tabla 1. Datos de entradas y salidas en la aplicación Silva Portela et al. (2003).

SUCURSAL	ENTRADAS		SALIDAS		
	costes trabajadores	otros costes de operaciones	cuentas corrientes	créditos	ingresos por intereses
1	16,819	24,471	4892,629	10238,76	52,234
2	11,243	23,558	4777,107	8756,227	52,449
3	18,441	35,090	6450,385	12479,115	64,644
4	10,106	23,104	5223,611	12572,231	61,332
5	15,129	32,781	7666,449	10221,426	67,682
6	12,979	23,658	4991,984	10194,377	48,583
7	11,717	29,314	4070,63	6418,995	40,328
8	18,306	31,359	7561,477	21922,138	101,725
9	16,505	31,574	6322,393	17323,595	81,404
10	12,211	24,411	3663,067	10103,516	49,062
11	11,981	17,857	3899,831	10658,024	51,052
12	12,689	25,489	4797,797	10281,063	48,822
13	16,166	26,062	3946,813	7358,401	46,214
14	12,041	19,688	5524,905	7393,716	48,912
15	10,021	16,780	3394,509	8269,236	39,565
16	12,739	18,505	5635,758	6667,397	63,048
17	12,505	17,508	4745,698	9603,156	48,199
18	15,178	21,418	5758,861	6007,936	64,21
19	14,146	22,291	4391,541	8259,17	50,503
20	12,959	20,117	5372,053	7323,49	64,076
21	9,073	19,259	2888,434	8694,691	39,974
22	9,747	13,004	2107,062	5012,42	24,202
23	10,639	22,566	3344,774	10293,887	43,311
24	13,338	24,820	4354,301	10889,84	57,033
SUMA	316,678	564,684	115782,069	236942,807	1308,564

En la tabla 2, se muestran los objetivos o “targets” utilizados en el modelo para cada entrada y salida. Los guiones representan aquellas sucursales que no tienen objetivos establecidos en alguna dimensión.

Tabla 2. Objetivos parciales a alcanzar de cada entrada y salida para cada sucursal.

SUCURSAL	ENTRADAS		SALIDAS		
	costes trabajadores	otros costes de operaciones	cuentas corrientes	créditos	ingresos por intereses
1	16	24	-	10500	53
2	9	23	5000	-	53
3	18	-	7000	13000	-
4	8	20	6000	-	-
5	-	-	-	-	-
6	-	23	5000	-	49

7	11	-	4500	7000	-
8	-	-	-	-	-
9	16	-	-	17500	82
10	-	24	4000	-	50
11	-	-	4000	-	-
12	-	25	5000	-	49
13	16	-	-	7500	47
14	-	-	-	-	47
15	-	14	-	9000	30
16	-	-	6000	-	54
17	-	15	6000	10000	40
18	-	21	6000	-	65
19	14	-	4500	8300	-
20	-	20	5500	-	65
21	6	-	-	-	-
22	5	-	-	-	-
23	10	-	3500	11000	-
24	-	24	4500	-	58

Las celdas sombreadas en gris indican aquellos targets que quedan fuera de la zona de admisibilidad del problema, lo que obligará al modelo en su primera fase a calcular un punto tecnológicamente alcanzable y cercano al target que se ha determinado.

Para el cálculo de los pesos asociados a la importancia de cada entrada y salida del problema, se ha utilizado la metodología de análisis de decisión multicriterio para la ayuda de toma de decisiones complejas, AHP. A partir del establecimiento de una estructura jerárquica que contenga el objetivo a alcanzar en el nivel superior, los atributos o criterios en los niveles intermedios, y las alternativas en el nivel inferior, se desarrolla una serie de comparaciones por pares entre todos sus elementos que da lugar a la determinación de unos valores de importancia para cada una de las alternativas definidas.

La jerarquía propuesta está compuesta de dos subestructuras diferenciadas:

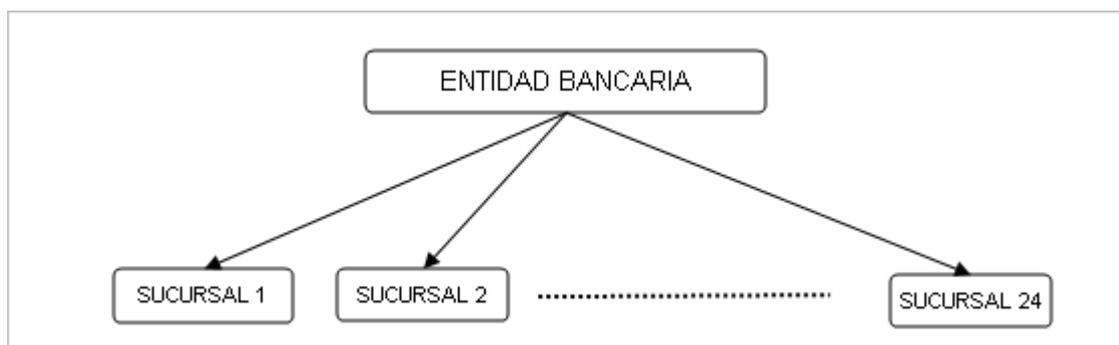


Figura 2. Primera subestructura de la Jerarquía correspondiente al cálculo de pesos para el modelo DEA Centralizado con Articulación de Preferencias

Las importancias relativas de cada sucursal respecto a su nivel superior en la jerarquía, en este caso la entidad bancaria, se toman en función de criterios definidos para cada sucursal. Por no disponer de los datos reales asociados a la aplicación, se han empleado valores aleatorios.

La otra subestructura claramente diferenciada es la siguiente:

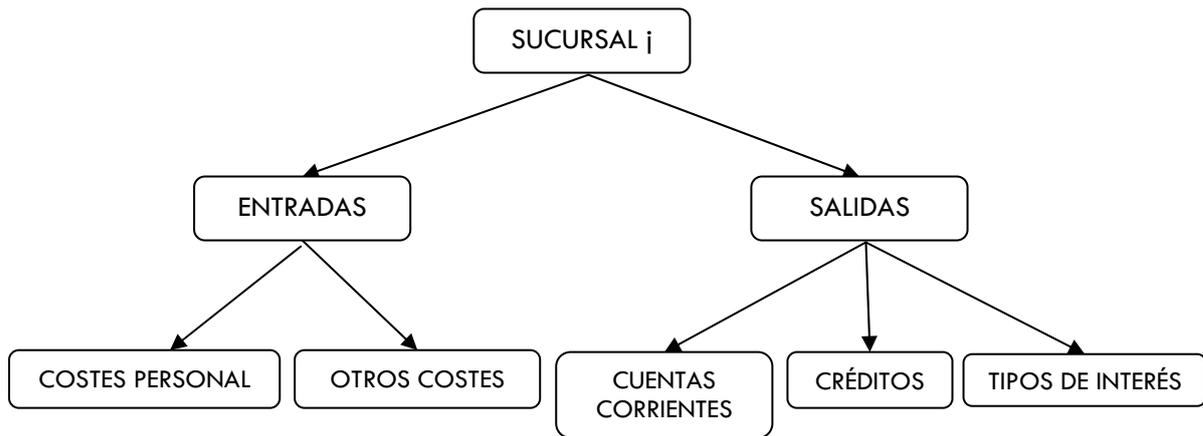


Figura 3. Segunda subestructura de la Jerarquía correspondiente al cálculo de pesos para el modelo DEA Centralizado con Articulación de Preferencias

Los subcriterios utilizados para relacionar en la jerarquía las entradas y salidas del problema son las prioridades entre disminuir las unas y aumentar las otras. Los valores de los juicios por pares necesarios para la resolución de la jerarquía se consultaron a un experto, obteniendo de esta forma unos valores generales. Por no contar con datos adicionales que distinguieran las políticas a seguir para cada sucursal, los pesos de estos criterios fueron modificados aleatoriamente. Esta segunda subestructura fue resuelta para cada DMU utilizando el *software* “Expert Choice”.

Los valores obtenidos para cada entrada y salida del problema una vez aplicada la primera fase del modelo se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 3. Solución de la primera fase del modelo.

SUCURSAL	ENTRADAS		SALIDAS		
	costes trabajadores	otros costes de operaciones	cuentas corrientes	créditos	ingresos por intereses
1	16	24	5152,024	10500	53
2	9,908	22,369	4777,107	11830,815	53
3	14,929	28,379	6450,385	13000	67,296
4	10,106	23,104	5223,611	12572,231	61,332
5	15,129	32,781	7666,449	10221,426	67,682
6	11,460	23	5000	11165,8799	49
7	11	23,159	4200,854	7000	48,773
8	18,306	31,359	7561,477	21922,138	101,725
9	15,934	28,739	6626,269	17500	82
10	13,089	24	4000	10481,962	50
11	13,338	24,82	4000	10889,84	57,033
12	13,717	25	5000	11777,438	49
13	16	24,553	4765,973	7500	47
14	16,523	19,688	5524,905	7393,716	48,912
15	11,238	15,923	3394,509	8269,236	39,565
16	17,306	26,728	5767,304	14067,811	63,048
17	12,505	17,508	4745,698	9603,156	48,199
18	13,440	21	5919,105	9415,654	65
19	13,564	25,117	4500	8300	59,063

20	13,248	20	5500	9362,227	65
21	9,073	19,259	2888,434	8694,691	39,974
22	9,073	19,259	2888,434	8694,691	39,974
23	10	20,939	3500	11000	53,242
24	11,794	24	4500	11693,780	58
SUMA	316,678	564,684	119552,538	262856,692	1366,818

Esta primera fase reduce las entradas y aumenta las salidas hasta el nivel marcado como objetivo en la tabla 2, siempre que sea posible. Los valores sombreados en gris corresponden a las entradas y salidas que tenían establecidos objetivos tecnológicamente inalcanzables. Para esos casos, el modelo fija el valor admisible más cercano al “target”. Todo ello se ha realizado teniendo en cuenta, por una parte, las preferencias calculadas en la jerarquía resuelta mediante AHP, y por otra, la restricción centralizada de no consumir en total más entradas que las inicialmente disponibles. Prueba de esto último es que la suma de las entradas permanece constante.

Los resultados de la segunda fase del modelo son los siguientes:

Tabla 4. Solución para la segunda fase del modelo.

SUCURSAL	ENTRADAS		SALIDAS		
	costes trabajadores	otros costes de operaciones	cuentas corrientes	créditos	ingresos por intereses
1	13,472	24	5152,024	10500	56,769
2	9,908	22,369	4777,107	11830,815	57,248
3	14,929	28,379	6450,385	13000	67,296
4	10,106	23,104	5223,611	12572,231	61,332
5	15,129	32,781	7666,449	10221,426	67,682
6	11,460	23	5000	11165,880	56,344
7	11	23,159	4200,854	10540,722	48,773
8	18,306	31,359	7561,477	21922,138	101,725
9	15,934	28,739	6626,269	18815,848	87,352
10	13,089	24	4198,348	10481,962	54,755
11	13,338	24,820	4354,301	10889,840	57,033
12	13,717	23,153	5059,785	11777,438	59,110
13	13,095	24,553	4765,973	9566,775	53,341
14	13,754	19,688	5524,905	7393,716	60,991
15	11,238	15,923	3394,509	8269,236	40,155
16	17,306	26,728	5767,304	14067,811	68,454
17	12,505	17,508	4745,698	9603,156	48,199
18	13,440	21	5919,105	9415,654	68,284
19	12,759	25,117	4500	13394,580	59,063
20	13,248	20	5582,238	9362,227	65
21	9,073	19,259	2888,434	8694,691	39,974
22	9,073	19,259	2888,434	8694,691	39,974
23	10	20,939	4501,466	11000	53,242
24	11,794	24	4769,706	11693,780	59,087
SUMA	307,673	562,837	121518,382	274874,617	1431,183

Puede observarse que se han mejorado los valores encontrados en la primera fase. Se puede comprobar que todos los puntos de operación obtenidos están ubicados en la frontera eficiente de la tecnología desarrollada en el problema.

Si se analizan los valores iniciales, los obtenidos en la primera fase y los obtenidos en la segunda fase para cada sucursal, se puede observar que algunas DMUs como las número 10, 11 y 12 adquieren un mayor valor de la entrada “costes de personal” en las dos fases del modelo respecto al valor inicial. Lo mismo sucede con las unidades 11, 16 o 19 cuando se analiza la entrada “otros de costes de operaciones”. De esta forma, el modelo concede empeoramientos de algunas de las unidades productivas en algunas dimensiones, en pos de la mejora del conjunto.

7. Conclusiones

A través del modelo presentado en este artículo, se ha desarrollado una metodología basada en DEA que obtiene los puntos de operación a los que deben tender las unidades productivas dependientes de una organización superior, cuando han sido impuestos, con ciertas preferencias, unos objetivos a alcanzar en sus recursos y productos.

Un futuro trabajo a abordar por los autores en esta línea de investigación será la aplicación de estos modelos en otros sectores marcadamente centralizados, como el hospitalario, pudiéndose modificar la formulación para adoptar nuevas orientaciones y tecnologías. Por otro lado, es posible una ampliación de la metodología considerando targets de tipo fuzzy. Esto conllevaría a que el modelo se adaptase de una forma más fidedigna a la realidad de este tipo de problemas de gestión, ya que en numerosas ocasiones los objetivos establecidos no son del todo conocidos por el analista.

Agradecimientos

Los autores desean expresar su agradecimiento a las inestimables observaciones del profesor D. Sebastián Lozano en los modelos presentados en este artículo.

Referencias.

- Athanassopoulos, A.D. (1995). "Goal programming and data envelopment analysis (GoDEA) for target based multi-level planning: Allocating central grants to the Greek local authorities", *European Journal of Operational Research*, Vol. 87 (3), pp. 535-550.
- Beasley, J. E. (2003). "Allocating Fixed Costs and Resources Via Data Envelopment Analysis", *European Journal of Operational Research*, Vol. 147, pp. 198-216.
- Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Tone, K. (2000). *Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*. Kluwer Academic Publishers: Boston.
- Golany, B. and Tamir, E. (1995). "Evaluating Efficiency-Effectiveness-Equality Trade-offs: A Data Envelopment Analysis Approach", *Management Science*, Vol. 41(7), pp. 1172-1184.
- Kumar, C. K. and Sinha. B. K. (1999). "Efficiency Based Production Planning and Control Methods", *European Journal of Operational Research*, Vol. 117, pp. 450-469.
- Lozano, S. and Villa, G. (2004). Centralized Resource Allocation Using Data Envelopment Analysis, *Journal of Productivity Analysis*, Vol. 22, pp. 143-161.
- Nijkamp, P. and Rietveld, P. (1981). "Multi-objective multi-level policy models: An application to regional and environmental planning", *European Economic Review*, Vol. 15, pp. 63-89.
- Ruefli, T. (1974). "Analytical models of resource allocation in hierarchical multi-level systems", *Socio-Economic Planning Sciences*, Vol. 8, pp. 353-363.
- Saaty, T.L. (1980). *The Analytic Hierarchy Process*. McGraw-Hill Company, New York.

Silva Portela, MCA, Castro Borges, P. and Thanassoulis, E. (2003). Finding closest targets in non-oriented DEA models: the case of convex and non-convex technologies. *Journal of Productivity Analysis*, Vol. 19, pp. 251-269.

Thanassoulis, E. and Dyson, R. (1992). "Estimating preferred targets input-output levels using Data Envelopment Analysis", *European Journal of Operational Research*, Vol. 56, 80-97.