4th International Conference on Industrial Engineering and Industrial Management
XIV Congreso de Ingeniería de Organización
Donostia- San Sebastián , September 8th -10th 2010

Nuevo algoritmo para obtener una solucion inicial básica factible en el problema de transporte

Francisco López Ruiz[1]

[1]Departamento de Organización de Empresas. Escuela Universitaria Politécnica Donostia - San Sebastián. Universidad del País Vasco. Plaza de Europa 1, San Sebastián. francisco.lopez@ehu.es

Resumen

Los métodos de resolución del problema de transporte pertenecen a una de estas dos categorías: métodos óptimos y métodos heurísticos. Los métodos basados en técnicas heurísticas, determinan una solución inicial básica factible (SIBF) que tras un posterior proceso de mejora, permiten obtener la solución óptima. Existen diversos métodos para obtener una SIBF. Cada uno de ellos presenta ventajas e inconvenientes. Este artículo aporta un nuevo algoritmo para la obtención de soluciones iniciales basado en los métodos heurísticos, que combina las ventajas de sencillez, rapidez y eficacia en las asignaciones a realizar, frente a otros métodos más conocidos.

Palabras clave: Métodos Cuantitativos. Programación lineal. Problema del Transporte. Algoritmo de Transporte. Técnicas heurísticas. Métodos de obtención de una solución inicial. Algoritmo de optimización y mejora.

1. Introducción

El problema de transporte fue planteado y resuelto por Hitchcock (1941) con anterioridad a la formulación del concepto general de la programación lineal, siendo una de las aplicaciones más interesantes dentro de los problemas de programación lineal. Consiste en un modelo lineal que presenta una estructura especial, considerándose como una subclase de la programación lineal. No obstante, las variables de decisión que aparecen en el problema únicamente toman valores enteros y, en consecuencia, debe considerarse como un problema de programación entera.

Los *modelos combinatorios* permiten resolver este tipo de problema. Un enfoque inicial de resolución consiste en evaluar cada posible solución (cada posible combinación de valores enteros para las variables del problema). Sin embargo, presentan una importante *complejidad computacional* puesto que incluso un problema de tamaño pequeño, tendría un número elevado de posibles soluciones, por lo que se hace necesario buscar otros métodos de solución más eficientes.

Los esfuerzos realizados se han dirigido en principio hacia los llamados métodos exactos, que son aquellos que permiten obtener una solución óptima exacta para el problema combinatorio utilizando algoritmos matemáticos que permitan reducir la búsqueda de soluciones (caso del método Simplex). Sin embargo, debido a los tiempos excesivos de resolución (de tipo exponencial), estos métodos no resultan ser apropiados para su utilización en problemas de tamaño grande.

Alternativamente, se han propuesto algunos métodos heurísticos carentes de base matemática formal basados en la intuición; sin embargo, su utilización permite obtener una solución inicial próxima a la óptima, presentando la ventaja de obtener ahorros considerables en tiempo respecto a los métodos basados en algoritmos matemáticos. Cada una de estas alternativas (métodos basados en algoritmos matemáticos y métodos heurísticos), presentan ventajas e inconvenientes. El presente artículo aporta un nuevo algoritmo para la obtención de soluciones iniciales básicas factibles basado en los métodos heurísticos, que combina las ventajas de sencillez, rapidez y eficacia en las asignaciones a realizar y que apenas necesita realizar cálculos, frente a otros métodos más conocidos para determinar soluciones iniciales.

La estructura del artículo es la siguiente. En la sección 2 se plantean los conceptos básicos del modelo de transporte y sus diferentes formas de resolución. En la sección 3 se describe y presenta el algoritmo de transporte, indicando diferentes métodos para determinar una solución inicial básica factible, junto con los métodos a utilizar dentro del proceso de optimalidad y mejora de una solución. En la sección 4, se presenta el algoritmo propuesto junto con un ejemplo de aplicación. Finalmente, las conclusiones se presentan en la última sección.

2. Conceptos básicos del problema de transporte

El objetivo de los modelos de transporte es encontrar la solución a un coste mínimo para la realización de un plan de envíos, transporte o distribución, desde cualquier grupo de centros de abastecimiento o suministro llamados orígenes, a cualquier grupo de centros de recepción llamados destinos, es decir, determinar la cantidad de productos o mercancías que deben enviarse desde cada punto de origen a cada punto de destino, teniendo en cuenta las restricciones propias del problema referidas a las capacidades o disponibilidades de los centros de abastecimiento o suministro y las demandas de los centros de destino, de manera que se minimicen los costes totales de transporte o distribución.

Los orígenes pueden ser fábricas, almacenes o cualquier punto o lugar desde el que se quiera enviar mercancías o productos. Los destinos son los puntos o lugares en donde se reciben dichas mercancías o productos. La resolución de este de este tipo de problemas, puede ser llevada a cabo utilizando un programa lineal o bien, mediante el algoritmo de transporte basado en la forma matricial.

Cuando se utiliza un programa lineal, expresando el problema de transporte en forma estándar, al ser las restricciones igualdades es posible su resolución utilizando el método del Simplex, añadiendo las correspondientes variables artificiales para obtener una solución inicial. No obstante, la carga computacional para la resolución de este problema es grande, debido a la cantidad elevada de variables de decisión y restricciones que forman parte de él, incluso en el supuesto de que el número de orígenes y destino tengan valores moderados. Por esta razón, teniendo en cuenta la estructura especial del problema se han propuesto algunos métodos de resolución más eficientes (en el tiempo), que la resolución a través del método del Simplex en su forma usual, y que se apoyan en la *forma matricial* del problema que consiste en representar el problema del transporte mediante la llamada *tabla de transporte*, con el objetivo de resumir de manera conveniente, todos los datos del problema para resolverlo mediante el llamado *algoritmo de transporte.* El método básico que se desarrollará para resolver el problema de transporte, necesita que el problema esté *equilibrado* para poderlo expresar en su forma *estándar.* En consecuencia, cualquier problema que no se encuentre en la forma anterior necesita para su posterior resolución ser transformado. Esta transformación se realiza mediante la correspondiente introducción de orígenes o destinos ficticios, según sea el caso que se presente.

3. Resolución mediante el algoritmo de transporte

El proceso de resolución del problema de transporte, se fundamenta en una serie de definiciones, propiedades y teoremas que posibilitan el posterior desarrollo de los resultados básicos obtenidos. Debido a las razones expuestas anteriormente con relación a la resolución del problema del transporte mediante la utilización del método del Simplex, se expone el método de resolución que utiliza la forma matricial del citado problema mediante el llamado *algoritmo de transporte*.

3.1 Algoritmo de transporte

El método general de resolución del problema de transporte consta de tres fases que conforman el algoritmo de transporte.

Fase A. Paso 1.-Escribir el problema de transporte en la forma matricial. Si el problema es no equilibrado, transformarlo en equilibrado. A continuación, ir al paso 2.

Fase B. Paso 2.-Determinar una solución básica factible inicial. A continuación, ir al paso 3.

Fase C. Paso 3.-Si la solución obtenida en el paso 2 es óptima, detener el proceso. En otro caso, ir al paso 4.

Paso 4.-Obtener una nueva solución que mejore la anterior. Ir al paso 3.

3.2 Determinación de una solución inicial

Dentro de la fase B, existen diferentes métodos para determinar una solución básica factible inicial, entre los que cabe citar:

Northwest Corner Method (NWC) o Método de la Esquina Noroeste (MEN); Vogel's Approximation Method (VAM) o Método de Aproximación de Vogel; Matrix Minimun (MM); Russell's Approximation Method (RAM) o Método de Aproximación de Russell; Método de los Flujos Mutuamente Preferibles (MFMP), Houthakker (1955); Cost Preprocessing (CP), Winston (1994); Método de Aproximación por Columnas (MAC), Método de Aproximación por Filas (MAF), Método de Aproximación por Filas y Columnas (MAFC), López (2003).

3.3 Optimalidad y mejora de una solución

Una vez finalizada la Fase B que ha proporcionado una solución básica inicial factible no degenerada, es necesario desarrollar la Fase C del algoritmo de transporte, que consiste en determinar si la citada solución es óptima y, en caso de no serlo, obtener una nueva solución con menor coste que la solución actual. Si la solución básica obtenida no es óptima, la mejora es posible y ésta se puede llevar a cabo mediante diferentes métodos o algoritmos, entre los que cabe citar el de Stepping-Stone, Dantzig (1951); el método de los multiplicadores **u-v**, Dorfman et al. (1964); el de Ford-Fulkerson (1962); el de Separación en Estrella de Zimmern (1957) y el método gráfico de Vidale (1958). En la mayoría de ocasiones, la utilización del algoritmo **u-v,** supone ahorros en tiempo con respecto al algoritmo de Stepping-Stone en la resolución de problemas de transporte debido a su rapidez y el fácil tratamiento de las soluciones degeneradas. Este método, **u-v** utiliza el dual del problema de transporte.

4. Resolución del problema de transporte, utilizando un nuevo algoritmo para determinar una solución básica factible inicial

El algoritmo de transporte consta de tres fases: A, B y C. Como se ha indicado anteriormente, dentro de la Fase B para la determinación de una solución básica factible inicial, existen diferentes métodos o algoritmos. El objetivo de este artículo, es aportar un algoritmo para determinar una solución básica factible inicial próxima a la solución óptima de forma sencilla y sin apenas realizar cálculos, de manera que mediante el posterior proceso de optimización y mejora y tras pocas iteraciones (Fase C), se obtenga la solución óptima. Este algoritmo, proporciona como máximo (m + n -1) posiciones localizadas, siendo las variables asociadas con dichas posiciones las correspondientes a las variables básicas iniciales.

El algoritmo propuesto se basa en satisfacer columna a columna la tabla de un problema de transporte, de manera secuencial. No se justifica en forma analítica, sino que está basado en la noción intuitiva de que determinadas posiciones o casillas, tienen una probabilidad más elevada de no estar incluidas en la solución óptima (en concreto, las de mayor coste). A continuación pasamos a exponer los pasos correspondientes al algoritmo propuesto.

4.1 Pasos del algoritmo propuesto

Paso 1

Seleccionar la columna j que contiene a la casilla (i, j) con mayor coste c_{ij}. En caso de igualdad de dos o más casillas con el mayor coste c_{ij} pertenecientes a diferentes columnas, elegir la columna cuya diferencia (d) entre las dos casillas de menor coste presente el mayor valor. Si se mantiene la igualdad tras determinar dicha diferencia, elegir la columna con menor índice. A continuación, ir al paso 2.

Paso 2

Seleccionada la columna j del anterior paso 1, se procede como sigue:

2.1 En la columna j, determinar la posición (i, j) correspondiente a la casilla de menor coste c_{ij}. En caso de igualdad entre casillas de menor coste, elegir la casilla con menor índice de fila.

2.2 Asignar a la casilla (i, j) del paso 2.1 la cantidad x_{ij} tal que:

$$x_{ij} = \min (S_i, D_j) \tag{1}$$

2.3 Reducir S_i y D_j en la cantidad x_{ij} asignada a la casilla (i, j) del paso 2.1 de acuerdo con:

$$S'_i = S_i - x_{ij} \qquad D'_j = D_j - x_{ij} \tag{2}$$

Con esto se consigue que la fila i o la columna j queden satisfechas, tachando la fila o columna satisfecha. Si se satisfacen simultáneamente una fila y una columna, tachar la columna, asignando a la fila una disponibilidad de cero.

2.4 Si la columna que contiene a la casilla (i, j) de mayor coste del paso 1 está satisfecha, ir al paso 3. En caso contrario, volver a iniciar el paso 2.

Paso 3

Mientras exista más de una columna sin satisfacer, volver al paso 1. Cuando únicamente exista una columna o una fila sin satisfacer, realizar las únicas asignaciones posibles. El proceso finaliza. Se habrá obtenido una solución inicial básica factible (SIBF).

4.2 Ejemplo

Como aplicación del método propuesto, tratemos de resolver el siguiente problema de transporte, ver Taha (1998), representado en la Tabla 1 en forma matricial (costes unitarios en unidades monetarias, u. m., en parte inferior derecha de cada casilla).

Tabla 1.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Destino 4	Disponibilidad
Origen 1	10	2	20	11	**15**
Origen 2	12	7	9	20	**25**
Origen 3	4	14	16	18	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

Variables de decisión: x_{ij} = unidades de producto a transportar desde el origen i al destino j.

$i = 1, 2, 3 \qquad j = 1, 2, 3, 4$

Fase A. Se observa que el problema es equilibrado puesto que:

$$\sum_{i=1}^{i=3} s_i = \sum_{j=1}^{j=4} d_j \qquad \sum_{i=1}^{i=3} s_i = 15 + 25 + 10 = 50 \qquad \sum_{j=1}^{j=4} d_j = 5 + 15 + 15 + 15 = 50$$

Fase B. Los pasos a seguir del algoritmo propuesto se indican en las siguientes tablas:

Tabla 2. Primera asignación

Origen	**Destino 1**	**2**	**3**	**4**	Disponibilidad
1	10	2	20	11	15
2	12	7	9*	20	25
3	4	14	16	18	10
Demanda	5	15	15	15	Paso 2. Asignar a la

Paso 1. Columnas elegidas para realizar la asignación (●): las que contienen a las casillas con mayor coste (20)	● ●	posición de menor coste* la cantidad: x_{23} = 15
Diferencias (d) por columna	7 7	Eliminar la columna 3
Columna elegida para asignar por tener menor índice de columna: (●)	●	S'_2 = 25 - 15 = 10

Tabla 3. Segunda asignación

Origen	Destino 1	Destino 2	Destino 4	Disponibilidad
1	10	2	11*	15
2	12	7	20	10
3	4	14	18	10
Demanda	5	15	15	Paso 2. Asignar a la posición de menor coste* la cantidad: x_{14} = 15
Paso 1. Columna elegida para asignar (●): la que contiene a la casilla de mayor coste (20)			●	Eliminar la columna 4 S'_1 = 15 - 15 = 0

Tabla 4. Tercera asignación

Origen	Destino 1	Destino 2	Disponibilidad
1	10	2*	0
2	12	7	10
3	4	14	10
Demanda	5	15	Paso 2. Asignar a la posición de menor coste* la cantidad: x_{12} = 0
Paso 1. Columna elegida para asignar (●): la que contiene a la casilla de mayor coste (14)		●	Eliminar la fila 1

Tabla 5. Cuarta asignación

	Destino	

Origen	1	2	Disponibilidad
2	12	7*	10
3	4	14	10
Demanda	5	15	Paso 2. Asignar a la posición de menor coste* la cantidad: $x_{22} = 10$ Eliminar la fila 2 $D'_2 = 15 - 10 = 5$
Paso 1. Columna elegida para asignar (●): la que contiene a la casilla de mayor coste (14)		●	

Tabla 6. Quinta y sexta asignación

Origen	Destino		Disponibilidad
	1	**2**	
3	4	14	10
Demanda	5	5	Paso 3. Realizar las únicas asignaciones posibles: $x_{31} = 5$ $x_{32} = 5$
Paso 3. Existe una sola fila sin satisfacer.			

Como todas las columnas están satisfechas, el proceso se detiene. La solución inicial básica factible (SIBF) obtenida es:

$x_{11} = 0$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 0$, $x_{14} = 15$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 10$

$x_{23} = 15$, $x_{24} = 0$, $x_{31} = 5$, $x_{32} = 5$, $x_{33} = 0$, $x_{34} = 0$

La segunda asignación $x_{14} = 15$, satisface tanto la disponibilidad (15) en la fila 1 como la demanda (15) en la columna 4. Sin embargo, en lugar de tachar la fila y columna, el algoritmo en su paso 2.3 indica que se tache sólo la columna y se deje la fila con una disponibilidad de cero, para que posteriormente proporcione una variable básica *degenerada* ($x_{12} = 0$) en la siguiente asignación.

Una asignación de valor cero, puede parecer irrelevante. No obstante, esto tiene su importancia, puesto que en el algoritmo de transporte es necesario conocer la totalidad de las (m + n -1) variables básicas, incluidas las que valen cero y que constituyen la solución básica factible actual. En forma matricial, la solución obtenida se indica en la siguiente Tabla 7.

Tabla 7. Solución inicial básica factible (SIBF) mediante método nuevo algoritmo

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Destino 4	Disponibilidad
Origen 1	10	**0** 2	20	**15** 11	**15**
Origen 2	12	**10** 7	**15** 9	20	**25**
Origen 3	**5** 4	**5** 14	16	18	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

El coste asociado a esta solución no degenerada es:

$$C = 2 \,.\, (0) + 11 \,.\, (15) + 7 \,.\, (10) + 9 \,.\, (15) + 4 \,.\, (5) + 14 \,.\, (5) = 460 \text{ u. m.}$$

Fase C. Utilizando el algoritmo **u-v,** se comprueba que la solución inicial obtenida anteriormente no es óptima, por existir un valor indicador negativo($\alpha_{34} = -5$). Tras aplicar el proceso de mejora, se obtiene la solución indicada en la Tabla 8.

Tabla 8. Nueva solución básica factible

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Destino 4	Disponibilidad
Origen 1	13 10	**5** 2	16 20	**10** 11	**15**
Origen 2	10 12	**10** 7	**15** 9	4 20	**25**
Origen 3	**5** 4	5 14	5 16	**5** 18	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

Como todos los índices de mejora α_{ij} son no negativos (situados en la parte superior derecha de cada casilla), la solución obtenida es óptima y única, siendo necesarias dos iteraciones para su obtención. El coste asociado a esta solución óptima es:

$$C = 2 \,.\, (5) + 11 \,.\, (10) + 7 \,.\, (10) + 9 \,.\, (15) + 4 \,.\, (5) + 18 \,.\, (5) = 435 \text{ u. m.}$$

Los resultados comparativos obtenidos entre diferentes métodos para determinar una solución inicial en el ejemplo propuesto se indican en la Tabla 9.

Tabla 9.

Método utilizado para determinar la solución inicial	Valor de la función objetivo en la solución inicial	Número de iteraciones para obtener la solución óptima
Matrix Minimun (MM)	475	2
Northwest Corner Method (NWC)	520	3
Vogel´s Approximation Method (VAM)	475	2
Russell´s Approximation Method (RAM)	475	2
Método propuesto	460	2

La calidad de la solución inicial obtenida mediante el método propuesto es mejor que la obtenida utilizando los restantes métodos, por presentar un valor menor de la función objetivo. La comparación entre los métodos VAM, RAM y el propuesto, respecto a los cálculos a realizar para obtener una solución inicial factible, se indican en la Tabla 10:

Tabla 10.

VAM	17 valores correspondientes a las penalizaciones de fila (p_f) y columna (p_c)
RAM	22 valores correspondientes al coste relativo aproximado $\gamma_{ij} = c_{ij} - \overline{u}_i - \overline{v}_j$
Nuevo algoritmo	2 valores de diferencias (d) por columnas para realizar la primera asignación

Se observa una notable diferencia en la cantidad de cálculos a realizar para la obtención de los citados valores. En general, el método propuesto apenas requiere realizar cálculos. Solo es necesario calcular diferencias (d) en los casos en que existe igualdad entre casillas de mayor coste, para seleccionar la columna donde realizar una asignación.

5. Conclusiones

La utilidad del algoritmo propuesto en el presente artículo, se basa en la obtención de tres ventajas, como son:

– La buena calidad del valor obtenido de la función objetivo en la solución inicial, necesitando pocas iteraciones para obtener la solución óptima.

– Sencillez en la aplicación del algoritmo, puesto que para asignar unidades se utilizan criterios de elección de casillas basados en mayores o menores costes.

– En general, no se requiere realizar cálculos (excepto en casos de igualdad de costes en el paso 1), evitando la obtención de soluciones degeneradas.

Estas ventajas pueden ser comprobadas, comparando el método propuesto con los métodos MM, NWC, VAM y RAM, que son de los más utilizados, observando el resultado obtenido en el ejemplo propuesto. Frente al método NWC, se obtienen resultados más favorables puesto que permite obtener soluciones iniciales más cercanas a la solución óptima. Respecto a los métodos MM, VAM y RAM, presenta unos resultados comparables en la obtención de soluciones iniciales cercanas a la solución óptima, evitando los inconvenientes que presentan los métodos VAM y RAM de necesitar una serie de cálculos previos para poder realizar las asignaciones.

Referencias

Dantzig, G. B. (1951). Aplication of the Simplex Method to a Transportation Problem. Monografía n.º 13 de la Cowles Commision. John Wiley, New York.

Dorfman, R.; Samuelson, P.A.; Solow, R. M. (1964). Programación Lineal y Análisis Económico. Editorial Aguilar, Madrid .

Ford, L. R.; Fulkerson, D. R. (1962). Flows in Network. Princeton University Press, N. J.

Hitchcock, F. L. (1941). The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities. Journal of Mathematical Physics. American Institute of Physics (AIP) 20, pp.224-230.

Houthakker, H. S. (1955). On the Numerical Solution of the Transportation Problem. Jorsa 3, pp. 210-214.

López, F. (2003). Nuevos algoritmos en el problema de transporte. V Congreso de Ingeniería de Organización ADINGOR. Valladolid, Libro resúmenes de ponencias, pp. 167.

Madam Lal Mittal (1967). A note on resolution of degeneracy in transportation problem. Journal of the Operational Research Society 18, pp.175-184. Indian Statistical Institute, Calcutta.

Taha, H. A. (1998). Investigación de Operaciones. Una introducción. Prentice Hall, México, (6.ª Edición.), pp. 180-190.

Vidale, M. L. (1958). A Graphical Solution of the Transportation Problem. Journal of the Operational Research Society of America, Vol. 4, pp. 193-203.

Winston, W. L. (1994). Operations Research. Aplications and Algorithms. Editores: Duxbury Press, Belmont, California. Third Edition.

Zimmern, B. (1957). Resolution des Programes Lineaires de Transport par la Méthode de Separation en Étoile. First International Conference on Operational Research, Oxford, pp. 44-50.