6th International Conference on Industrial Engineering and Industrial Management.
XVI Congreso de Ingeniería de Organización. Vigo, July 18-20, 2012

Reformulación de los Métodos de Estimación del Fill Rate en Revisión Periódica (R, S) en un Contexto de Demanda Discreta

Reformulation of the Fill Rate Estimation in a Periodic Review System (R, S) in a Discrete Demand Context

Guijarro[1] E, Babiloni E, Cardós M, Albarracín, J M

Abstract The customer service metric known as fill rate, indicates the fraction of demand which is fulfilled directly from shelf. Expressions available on the literature to estimate it apply only under continuous demand pattern and generally assume normally distributed demands. However, the discrete nature of demand is the most often in practical environments. The objective of this paper consists of reformulating the fill rate expressions suggested by (Silver 1970), (Johnson et al. 1995), (Teunter 2009) and (Silver and Bischak 2011) based on same hipotheses and approach suggested by each of them. These new expressions are able to compute the fill rate when demand follows any discrete distribution function.

Resumen El fill rate es una métrica de servicio al cliente que representa la tasa de unidades servidas en un ciclo de aprovisionamiento. Generalmente esta métrica se define como el porcentaje de demanda que se sirve directamente con el stock físico disponible. Las expresiones que aparecen en la literatura para estimar el fill rate se centran en estimar la demanda servida en el ciclo en un entorno de demanda continua, y generalmente asimilable a la distribución normal. Sin embargo en la práctica la demanda raramente es continua, siendo la demanda discreta la más difícil de modelar. El objetivo de este artículo es proponer, basándose en las hipótesis y enfoque de cálculo para estimar el fill rate propuesto por (Silver 1970), (Johnson et al. 1995), (Teunter 2009) y (Silver and Bischak 2011), cuatro expresiones para estimar el fill rate cuando la demanda sigue cualquier función de distribución discreta.

[1] Ester Guijarro (✉)
Departamento de Organización de Empresas. Universitat Politècnica de València, Camí de Vera,s/n 46022 Valencia, Spain
e-mail: esguitar@doe.upv.es

Keywords: Gestión de inventarios, Revisión Periódica, Fill rate, Demanda discreta; **Palabras clave:** Inventory control, Periodic review, Fill rate, Discrete demand

1.1 Introducción y Revisión de la Literatura

Una de las métricas de servicio al cliente más empleadas en gestión de inventarios es la tasa de unidades servidas, más comúnmente conocida como fill rate *(β)*. Esta métrica se define como la fracción de demanda que puede atenderse directamente con el stock físico disponible, sin incurrir en pérdida de ventas ni retrasos en los pedidos (Silver et al. 1998) y suele expresarse como:

$$\beta = \frac{E(\text{demanda servida})}{E(\text{demanda total})} \tag{1.1}$$

Sin embargo, muchos autores lo calculan en términos de demanda no servida, es decir, como el complementario del ratio entre la demanda esperada no servida, o lo que es lo mismo, la demanda diferida, y la demanda total:

$$\beta = 1 - \frac{E(\text{demanda no servida})}{E(\text{demanda total})} \tag{1.2}$$

Los trabajos que se encuentran en la literatura sobre la estimación del fill rate en un sistema de revisión periódica (R, S) se centran en calcular el valor esperado de la demanda servida, i.e. el numerador de la expresión (1.1), o bien el valor esperado de la demanda no servida, i.e. el numerador de la expresión (1.2) dado que el valor esperado de la demanda total puede obtenerse de manera analítica sencilla. En la mayoría de los libros de gestión de inventarios [ver por ejemplo (Hadley and Whitin 1963); (Vollmann et al. 1997) o (Chase et al. 1992); entre otros] la tasa de unidades servidas se estima con lo que estos autores denominan "aproximación tradicional". Esta aproximación calcula la tasa de unidades servidas en términos de demanda no servida, y se expresa como en (1.2). Uno de los primeros trabajos que presenta dicha expresión es el de (Hadley and Whitin 1963), pero no como método de cálculo de la tasa de unidades servidas, sino como una aproximación simple para el cálculo de la demanda media diferida por ciclo. Posteriormente, esta fórmula es tomada por diversos autores para calcular el fill rate, ya que si se acepta diferir demanda, el valor esperado de la demanda no servida en un ciclo es equivalente al valor esperado de la demanda diferida en el mismo. En su libro, (Hadley and Whitin 1963) derivan esta aproximación para cualquier función de distribución continua. No obstante, son (Silver et al. 1998) quienes detallan su cálculo en el caso de que la demanda siga una función de distribución normal. (Silver 1970) propone un método de estimación del fill rate siguiendo la expresión

(1.1) en un sistema de revisión continua y demanda normal que es adaptado por (Johnson et al. 1995) a un sistema de revisión periódica (*R, S*). En ese mismo trabajo, (Johnson et al. 1995) proponen un método original de cálculo del fill rate. Ambas expresiones asumen que la demanda es distribuida siguiendo una distribución normal. Años más tarde, (Teunter 2009) propone un método de cálculo de la tasa de unidades servidas según la expresión (1.1) que aplica para cualquier distribución de demanda continua. Recientemente, (Silver and Bischak 2011) sugieren un métodos de cálculo alternativo al de (Hadley and Whitin 1963) cuando la demanda es, de nuevo, normalmente distribuida.

Por tanto, los métodos de estimación del fill rate clásicos se han desarrollado para demandas continuas y generalmente asumen normalidad de la misma. Sin embargo, la demanda rara vez cumple esta hipótesis, siendo la demanda discreta la más común en la práctica. Un ejemplo es la demanda de repuestos de mantenimiento. En (Guijarro et al. 2012) se lleva a cabo una discretización de los métodos de (Hadley and Whitin 1963) y (Silver et al. 1998) partiendo de las hipótesis de aplicación y del enfoque de cálculo de los mismos para su aplicación en entornos discretos. Siguiendo el mismo enfoque, en la sección 1.3. de este artículo se presentan las expresiones para entornos de demanda discreta de los métodos de (Silver 1970), (Johnson et al. 1995), (Teunter 2009) y (Silver and Bischak 2011). En la sección 1.4 se enfatizan las principales conclusiones de este trabajo, su aplicabilidad práctica y las futuras líneas de investigación que se derivan del mismo.

1.2 Revisión de Hipótesis y Descripción de la Política (*R, S*)

En la política clásica de revisión periódica (*R, S*) el inventario se revisa cada *R* unidades de tiempo y, en función de su nivel, se lanza una orden de aprovisionamiento de magnitud suficiente para que la posición de inventario alcance el nivel del stock de referencia *S*. La orden se recibe *L* periodos después de ser lanzada. La Fig. 1.1 muestra un ejemplo de la evolución del stock en un sistema (*R, S*). La notación que se va a utilizar en el resto del artículo se describe a continuación:

S	=	stock de referencia (unidades)
R	=	periodo de revisión correspondiente al tiempo transcurrido entre dos revisiones consecutivas y ciclo de aprovisionamiento correspondiente al tiempo transcurrido entre dos aprovisionamientos consecutivos (unidades de tiempo)
L	=	plazo de aprovisionamiento (unidades de tiempo)
D_t	=	demanda total acumulada en *t* periodos (unidades)
$f_t(\cdot)$	=	función de probabilidad de D_t
$F_t(\cdot)$	=	función de probabilidad acumulada de D_t

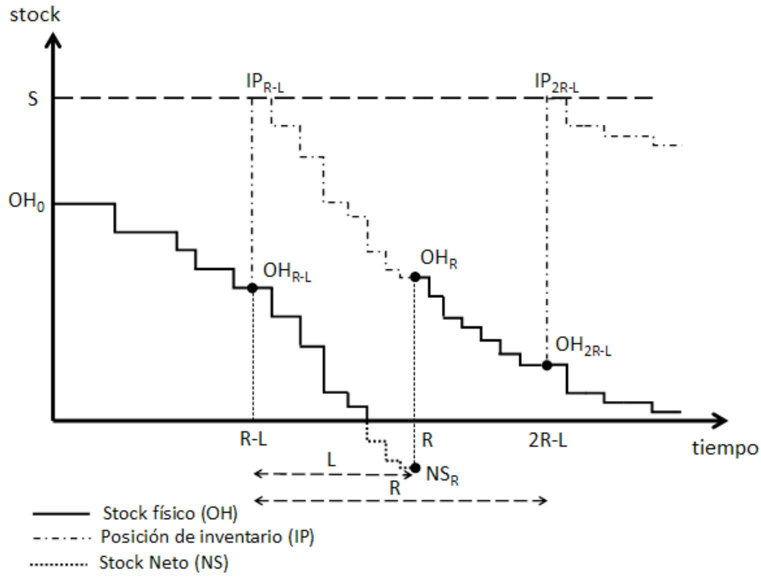

Fig. 1.1 Ejemplo de la evolución del stock es un sistema de gestión de inventarios (R, S)

En su derivación original los métodos de estimación del fill rate de (Silver 1970), (Johnson et al. 1995), (Teunter 2009) y (Silver and Bischak 2011) asumen las siguientes hipótesis: (i) la demanda en distintos periodos es estacionaria, independiente e idénticamente distribuida; (ii) la demanda que no se satisface en un ciclo se difiere al ciclo siguiente; (iii) el periodo de revisión está predeterminado y es constante; y (iv) el plazo de aprovisionamiento es constante y conocido. Las hipótesis particulares para cada método y su enfoque de cálculo se detallan en la siguiente sección.

1.3 Reformulación de los Métodos de Estimación del Fill Rate en un Contexto de Demanda Discreta

1.3.3 Silver (1970) modificado en un Contexto Discreto

Para obtener el valor esperado de la demanda servida por ciclo, (Silver 1970) calcula la porción de orden de aprovisionamiento que queda disponible para satisfacer la demanda de un ciclo tras haber atendido la demanda no servida de ciclos anteriores. Si la demanda es discreta, la demanda servida del ciclo puede expresarse como

$$E\left(demanda\ servida\right)_{Silver\_D} = \sum_{i=-\infty}^{S} D_R \cdot P\left(D_{R+L} = i\right) + \sum_{i=s+1}^{S+D_R} \left(S + D_R - i\right) \cdot P\left(D_{R+L} = i\right) + \sum_{i=S+D_R}^{\infty} 0 \cdot P\left(D_{R+L} = i\right) \tag{1.3}$$

y utilizando las funciones de probabilidad de D_t, el fill rate siguiendo el enfoque de (Silver 1970) se calcula como

$$\beta_{Silver70\_D} = \frac{\sum_{i=-\infty}^{S} D_R \cdot f_{R+L}(i) + \sum_{i=S}^{S+D_R} \left(S + D_R - i\right) \cdot f_{R+L}(i) \sum_{i=S+D_R}^{\infty} 0 \cdot P\left(D_{R+L} = i\right)}{\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot f_R(k)} \tag{1.4}$$

1.3.4 Johnson et al. (1995) en un Contexto Discreto

(Johnson et al. 1995) propone un método de cálculo de la tasa de unidades servidas para un horizonte temporal de un periodo, más concretamente del periodo más desfavorable, es decir, justo antes de recibir la orden de aprovisionamiento. Además de las hipótesis (i) a (iv) expuestas en la sección 1.2, introducen la siguiente: (v) la probabilidad de demanda nula en el ciclo es despreciable. Según este razonamiento, el valor esperado de las unidades no servidas es

$$E\left(\text{demanda no servida}\right)_{Johnson} = P\left(D_{R+L-1} \geq S\right) \cdot E\left[D_1\right] + P\left(D_{R+L-1} < S\right) \cdot E\left[D_1 - \left(S - D_{R+L-1}\right)\right]^{+} \tag{1.5}$$

En esta expresión, el primer término representa el valor esperado de la demanda no servida cuando la demanda en $R+L-1$ es menor que la posición de inventario al inicio de ciclo, S, i.e. $D_{R+L-1}<S$; y el segundo representa el caso contrario, el valor esperado de la demanda no servida cuando $D_{R+L-1} \geq S$. Si la demanda sigue una función de distribución discreta, el valor esperado de las unidades no servidas puede expresarse como

$$E\left(\text{demanda no servida}\right)_{Johnson\_D} = \sum_{i=-\infty}^{S} \sum_{j=S-i}^{\infty} \left(D_1 + i - S\right) \cdot \mathrm{P}\left(D_1 = j\right) \cdot \mathrm{P}\left(D_{R+L-1} = i\right) + \mu \cdot \mathrm{P}\left(D_{R+L-1} > S\right) \tag{1.6}$$

donde μ representa el valor de la demanda media. Utilizando las funciones de probabilidad de D_t, la expresión (1.6) puede reescribirse como

$$E(\text{demanda no servida})_{Johnson\_D} =$$

$$\sum_{i=-\infty}^{S}\sum_{j=S-i}^{\infty}\left(D_1 + D_{R+L-1} - S\right)\cdot f_1(j)\cdot f_{R+L-1}(i) + \mu\cdot\left(1 - F_{R+L-1}(S)\right) \quad (1.7)$$

y por tanto, el fill rate siguiendo el enfoque de (Johnson et al. 1995) en un contexto de demanda discreta es

$$\beta_{Johnson\_D} = \frac{\sum_{i=-\infty}^{S}\sum_{j=S-i}^{\infty}\left(D_1 + D_{R+L-1} - S\right)\cdot f_1(j)\cdot f_{R+L-1}(i) + \mu\cdot\left(1 - F_{R+L-1}(S)\right)}{\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot f_R(k)} \quad (1.8)$$

1.3.5 Teunter (2009) en un Contexto Discreto

Teunter propone un método para estimar el fill rate según la expresión (1.1). Para obtener el valor esperado de la demanda servida en el ciclo, calcula la disminución que se produce en el stock físico disponible entre el instante inmediatamente posterior a la recepción de la orden de aprovisionamiento y el instante inmediatamente anterior al lanzamiento de la siguiente orden de aprovisionamiento, es decir

$$E(\textit{demanda servida})_{Teunter} = E\left[S - D_L\right]^{+} - E\left[S - D_{R+L}\right]^{+} \quad (1.9)$$

En un contexto de demanda discreta, el valor de la demanda servida es

$$E(\textit{demanda servida})_{Teunter\_D} = \sum_{j=0}^{S}(S-j)P(D_L = j) - \sum_{i=0}^{S}(S-i)P(D_{R+L} = i) \quad (1.10)$$

y por tanto, utilizando las funciones de probabilidad de D_t, la expresión para calcular el fill rate según el enfoque de (Teunter 2009) en un entorno discreto es

$$\beta_{Teunter\_D} = 1 - \frac{\sum_{j=0}^{S}(S-j)f_L(j) - \sum_{i=0}^{S}(S-i)f_{R+L}(i)}{\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot f_R(k)} \quad (1.11)$$

1.3.6 Silver y Bischak (2011) en un Contexto Discreto

(Silver and Bischak 2011) proponen una expresión para el cálculo del fill rate basada en la expresión (1.2), es decir, calculando la demanda no servida del ciclo. Además de las hipótesis (i) a (iv) expuestas en la sección 1.2, introducen la siguiente: (v) la demanda diferida es tan pequeña que cuando se recibe la siguiente orden de aprovisionamiento, ésta siempre es suficiente para satisfacerla. De este modo, sugieren calcular el valor esperado de la demanda no servida en función de un determinado valor del tamaño de la orden de aprovisionamiento, Q_0, como

$$E\left(demanda\ no\ servida\right)_{Silver\&Bischak} = \begin{cases} 0 & D_L \le S-Q \\ D_L-\left(S-Q\right) & S-Q \le D_L \le S \\ Q & S \le D_L \end{cases} \tag{1.12}$$

Por tanto, para un entorno de demanda discreta, dicho enfoque puede concretarse como

$$E\left(demanda\ no\ servida\right)_{Silver\&Bischak\_D} = \sum_{i=S-Q_0}^{\infty}\left[i-\left(S-Q_0\right)\right]\cdot f_L\left(i\right)-\sum_{i=S}^{\infty}\left[i-S\right]\cdot f_L\left(i\right) \tag{1.13}$$

de modo que el fill rate puede obtenerse mediante la expresión

$$\beta_{Silver\&Bischak\_D} = 1-\frac{\sum_{i=S-Q_0}^{\infty}\left[i-\left(S-Q_0\right)\right]\cdot f_L\left(i\right)-\sum_{i=S}^{\infty}\left[i-S\right]\cdot f_L\left(i\right)}{\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot f_R\left(k\right)} \tag{1.14}$$

1.4 Conclusiones y Trabajo Futuro

Los métodos de estimación del fill rate que están disponibles en la literatura cuando el inventario se gestiona con una política de revisión periódica (*R, S*) asumen en su mayoría que la demanda es continua (y generalmente, distribuida normalmente). No obstante, en la realidad la demanda suele ser discreta (i.e. ítems con patrones de demanda errática o de lento movimiento como los repuestos). Por ello, la utilización de estas expresiones en un contexto de demanda discreta puede llevar a cometer desviaciones o sesgos significativos, o incluso a obtener valores negativos de la tasa de unidades servidas, tal y como se demuestra en (Guijarro et al. 2012).

Este trabajo, siguiendo las hipótesis y el enfoque de derivación del fill rate de los métodos de (Silver 1970), (Johnson et al. 1995), (Teunter 2009) y (Silver and Bischak 2011), plantea cuatro nuevas expresiones para estimar el fill rate que pueden utilizarse en entornos de demanda discreta y para cualquier distribución de probabilidad discreta a la que se asimile la demanda.

Futuras líneas de investigación naturales que se derivan de este trabajo consisten en analizar el comportamiento de cada una de las expresiones propuestas bajo diferentes contextos de demanda discreta, como intermitente, errática y de lento movimiento con el fin de determinar qué expresión es más precisa para cada patrón de demanda discreta.

1.5 Referencias

Chase R B, Aquilano N J, Jacobs F R (1992) Production and operations management. Manufacturing and servicies. Irwin McGraw-Hill,

Guijarro, E., Babiloni, E., Cardós, M., and Albarracín J.M. (2012) On Fill Rate Approximations in Periodic Review Systems for Discrete Demand 41 Industrial Engineering: Innovative Networkws Springer-Verlag London Limited,

Hadley G, Whitin T (1963) Analysis of Inventory Systems. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ

Johnson M E, Lee H L, Davis T, and Hall R (1995) Expressions for Item Fill Rates in Periodic Inventory Systems. Nav Res Logist 42:57-80

Silver E A, Pyke D F, Peterson R (1998) Inventory Management and Production Planning and Scheduling. Wiley,

Silver E A (1970) A Modified Formula for Calculating Customer Service Under Continuous Inventory Review. AIIE Transactions 2:241-245

Silver E A, Bischak D P (2011) The exact fill rate in a periodic review base stock system under normally distributed demand. Omega-int J Manage S 39:346-349

Teunter R H (2009) Note on the fill rate of single-stage general periodic review inventory systems. Oper Res Lett 37:67-68

Vollmann T E, Berry W L, Whybark D C (1997) Manufacturing planning and control systems. McGraw-Hill,