6th International Conference on Industrial Engineering and Industrial Management.
XVI Congreso de Ingeniería de Organización. Vigo, July 18-20, 2012

Modelación de parámetros ambientales por métodos de aproximación polinomial fragmentada para generar curvas de interpolación de datos de funciones complejas.

A Methodology for Modeling Environmental Parameters using Segmented Polynomial Interpolation of Observation Data

Baxter Q. Francis[1]; Jiménez W. Wilfredo[2] , Alvarado A.L.[3];.

Abstract

We present a calculation methodology to generate curves to model environmental phenomena and / or graphical representation of a single function. This paper presents an improvement to the theory of the Lagrange Polynomials. The La-grange polynomial fits the information to a function f (x) that represents 100% of the observed points, nevertheless when the number of these points increases, the calculation and utilization of the Lagrange Polynomial fitting become prohibitive in terms of complexity and computation cost. The proposed methodology uses the division of polynomials of degrees two, and three in different segments of the x-axis, eliminating the complexity of computing the coefficients of single function that represents the set of observed points.

Key words: Representation of Complex Points, Graph of Information, Modeling Functions, Polynomials, Lagrange, Adjustment of Curves.

[1]Francis Baxter. CDEA. Universidad de Antofagasta Fbaxter@gmail.com
[2]Wilfredo Jiménez Depto. Gestión de la Construción Universidad Católica del Norte wjimenez@ucn.cl
[3]Luis Alvarado Depto. Gestión de la Construcción Universidad Católica del Norte. lualvar@ucn.cl

Resumen

Se presenta una metodología de cálculo para generar curvas que permitan modelar fenómenos medioambientales y/o datos complicados de representar gráficamente a través de una función única. El trabajo presenta una mejora a la teoría del Polinomio de Lagrange. El polinomio de Lagrange ajusta los datos a una función f(x) que representa al 100% de los puntos observados, sin embargo cuando estos puntos son demasiados, se presenta la complejidad de que el método exige mucho cómputo, resultando una función de tan alto grado que su utilización es odiosa. La metodología utiliza el fraccionamiento de polinomios de grado dos, y tres en distintos segmentos de la recta x eliminando la complejidad de necesitar una función única que represente el conjunto de datos estudiados.

Palabras clave: Representación de Puntos Complicados, Gráfica de Datos, Modelamiento de Funciones, Polinomios, Lagrange, Ajuste de Curvas.

1.1 Introducción

En años recientes se ia incrementó la búsqueda de funciones gráficas que representen fenómenos atmosféricos tales como partículas en suspensión, radiación, tasas de evaporación, rapidez del viento, etc. Algunos modelos existentes son Polinomios de Taylor, Polinomios de Lagrange, Polinomios de Hermite, Interpolación de Birkhoff y la clásica representación del modelo lineal, más conocido como método de los mínimos cuadrados.

Sin embargo es indispensable disponer de nuevos métodos de aproximación que resulten menos afectados que los clásicos por la presencia de singularidades. En este contexto, la presente ponencia puede ser de gran utilidad, ya que presenta un estudio teórico y experimental de un método de aproximación numérica a datos con singularidades características, cuyo punto de partida está dado por los trabajos de Newman, Gonchar, Szabados, Turán, y Szüsz.

El objetivo del trabajo presentado es simplificar la complejidad de los modelos conocidos para interpolación de datos y llevarlos a expresiones simples de tipo cuadrático y cúbico, mediante aproximación polinominal por partes.

1.2 Modelo Matemático

Las interpolaciones con polinomios sufren de un problema básico, y es la aparción de grandes oscilaciones, especialmente si el grado del polinomio es alto. Por otra parte los modelos lineales suelen tener grandes errores cuando se tratan muchos datos. Una forma de obtener funciones interpoladoras, es dividiendo el intervalo en sucesivos intervalos, y generar polinomios de bajo grado en cada uno de estos intervalos, que aseguren bajas o nulas oscilaciones. Esto se llama aproximación polinomial por partes. Para que el resultado se ajuste a los datos que queremos, estos polinomios deben mantener continuidad en la función, la derivada primera y la derivada segunda, en cada uno de estos puntos límites, por ello este método utiliza funciones del tipo cuadrático o cúbica:

$$y=Ax^2+Bx^1+Cx^0 \tag{1.1}$$

$$y= Ax^3+Bx^2+Cx^1+Dx^0 \tag{1.2}$$

No se incluye el modelo lineal pues este aparece al hacer A=0 en la ecuación (1). Cuando se conocen los datos a través de mediciones directas, estas pueden ser representadas por un conjunto de puntos (XJ,YJ), en donde J es el número de puntos disponibles, el cual se traduce en un sistema de J ecuaciones lineales con J incógnitas. En donde J-1 es el grado del polinomio resultante. Para el caso del modelo cúbico J=4, se necesitan 4 puntos para determinar las 4 constantes A, B, C y D. Si generalizamos el método, se representa un polinomio de grado N-1, donde N es el número de puntos, por lo tanto es válido la siguiente relación para dicho modelo:

$$Y_J = \sum_{i=1}^{N} (X_J)^{N-i} \times A_J \tag{1.3}$$

En donde J tiene el universo J = 1, 2, 3,…..N.

Desarrollando esta expresión tenemos la siguiente expresión (1.4)

$$\begin{gathered}
Y_1 = (X_1)^{N-1} \times A_1 + (X_1)^{N-2} \times A_2 + \ldots.. + (X_1)^1 \times A_{N-1} + (X_1)^0 \times A_N \\
Y_2 = (X_2)^{N-1} \times A_1 + (X_2)^{N-2} \times A_2 + \ldots.. + (X_2)^1 \times A_{N-1} + (X_2)^0 \times A_N \\
\vdots \\
Y_N = (X_N)^{N-1} \times A_1 + (X_N)^{N-2} \times A_2 + \ldots.. + (X_N)^1 \times A_{N-1} + (X_N)^0 \times A_N
\end{gathered}$$

No confundirse y pensar que $(X_J)^{N-i}$ es la incógnita. Para este método es el Vector A, dado que cada punto (X_J,Y_J) es conocido, luego la relación simplificada que representa el sistema de ecuaciones (1.4) es:

$$X \times A = Y \tag{1.5}$$

Donde

$$X = \begin{bmatrix} (X_1)^N & \ldots & (X_1)^2 & ((X_1)^1 & (X_1)^0 \\ (X_2)^N & \ldots & (X_1)^2 & (X_1)^1 & (X_1)^0 \\ (X_3)^N & \ldots & (X_1)^2 & (X_1)^1 & (X_1)^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (X_N)^N & \ldots & (X_1)^2 & (X_1)^1 & (X_1)^0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \\ Y_N \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \\ A_N \end{bmatrix}$$

Donde la matriz X y el vector Y ambos son conocidos. El Vector A es el vector de incógnitas. Dado que la matriz es cuadrada, entonces si cada punto (X_J,Y_J) es distinto, entonces X es una matriz invertible. Del lado derecho de la relación $X \times A = Y$, debemos despejar el vector de incógnitas A, por lo tanto debemos multiplicar por X^{-1} en ambos lados de la igualdad, con lo cual obtenemos

$$(X^{-1} \times X) \times A = X^{-1} \times Y \tag{1.6}$$

Luego aplicando la propiedad de Identidad $I = (X^{-1} \times X)$, la resolución del vector A viene determinada por la siguiente expresión:

$$A = X^{-1} \times Y \tag{1.7}$$

Finalmente el modelo matemático resuelto genera el siguiente polinomio

$$y = A_1(x)^N + \ldots A_{N-2}(x)^2 + A_{N-1}(x)^1 + A_N(x)^0 \tag{1.8}$$

1.3 Algoritmos de la función en Excel que determina el número de aproximaciones polinomial para N puntos

```
FUNCTION NUMPOL(N) ' Carácter ² sale con Alt+0178 y Carácter ³ sale con Alt+0179 ‘ Autor: Francis Baxter Q. (usar libremente y citar al autor)
R$ = "Not Found"
If N = 2 Then R$ = "f(x)"
If N = 3 Then R$ = "f(x²)"
If N = 4 Then R$ = "f(x³)"
If N > 4 Then
A = Int((N - 2) / 3)
For X = Int((N + 1) / 3) To 0 Step -1
For y = Int((N + 1) / 3) To 0 Step -1
V = 4 * X + 3 * y - A
If V = N Then R$ = Str$(X) + " polinomios f(x³)   y   " + Str$(y) + " polinomios f(x²)": GoTo 10
Next
End If
10 NumPol = R$
END FUNCTION
```

1.3.1 Representación de datos, mediante aproximación polinomial fragmentada.

Resolver un problema significa informarse acerca de sus incógnitas. La estrategia para resolverlo, busca un modelo que lo represente, paso a paso, mediante aproximaciones polinomial. Se propone para su aplicación los datos del evaporación solar medidos en 2007.

Tabla 1.1 Tasa Evaporación solar en batea metálica en Antofagasta, año 2007:

Mes	Evaporación Solar[1]
Enero	5,9
Febrero	5,4
Marzo	4,3
Abril	3,1
Mayo	2,3
Junio	1,5
Julio	2
Agosto	2,6
Septbre.	2,9
Octubre	3,7
Novbre.	4,8
Dicbre.	5,1

[1]En litros por metros cuadrado.

Son 12 puntos los que forman el polinomio, se pensaría que se necesitan cuatro polinomios de grado tres para abarcar estos doce puntos, lo cual es incorrecto pues el último punto es compartido con el siguiente polinomio a generar, si se considera las tres curvas y no un punto común se producirían discontinuidades en la función.

Entonces, se entrega el algoritmo (10), el cual se deduce a través del método inductivo cuando nos referenciarnos a los datos contenidos en la Tabla 2, en donde se exponen cuantas funciones cúbicas $f(x^3)$, cuadráticas $f(x^2)$ y lineales $f(x)$ son necesarias para representar los N Datos.

El cálculo considera el número de puntos compartidos. Conocido el número de polinomios a utilizar, se aplica la metodología de aproximación polinomial por partes para modelar su curva

Considerados los 4 pares ordenados conocidos (1; 5.9); (2; 5.4); (3; 4.3) y (4; 3.1), para generar el Polinomio 1para el primer par ordenado. Se tiene el sistema de ecuaciones lineales descrito como sigue:

Dado un conjunto de N puntos donde todos los XJ se asumen distintos, el polinomio final es la combinación secuencial de los distintos polinomios que forman la curva. En nuestro ejemplo, para N=12 se tiene que los puntos compartidos son 3 y deberían generarse 3 curvas de grado cúbico y una curva de grado cuadrático para asegurar la continuidad de la función. La matriz X su correspondiente Matriz inversa y su matriz Y, vienen dadas por:

Matriz X

$$X = \begin{bmatrix} 1^3 & 1^2 & 1^1 & 1^0 \\ 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ 3^3 & 3^2 & 3^1 & 3^0 \\ 4^3 & 4^2 & 4^1 & 4^0 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa X^{-1}

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} -0.17 & 0.5 & -0.5 & 0.17 \\ 1.5 & -4 & 3.5 & -1 \\ 4.33 & 9.5 & -7 & 1.83 \\ 4 & -6 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz Y

$$Y = \begin{bmatrix} 5.9 \\ 5.4 \\ 4.3 \\ 3.1 \end{bmatrix}$$

Aplicando ecuación 7 se tiene

$$A = \begin{bmatrix} 0.0833 \\ -0.8000 \\ 1.3166 \\ 5.3 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

Cuya función para el primer polinomio Y=f(x) es

$$\mathbf{Y_1 = 0.0833\, x^3 - 0.8\, x^2 + 1.3167\, x + 5.3} \tag{1.10}$$

Los restantes polinomios se realizan en forma similar

1.3.2 Representación gráfica del polinomio fragmentado.

Aplicando el método para los restantes puntos, se determinan las 4 curvas, que permiten ajustar todos los datos a una curva continua, pero dividida en la fracción polinomial como se muestra la figura 1.1.

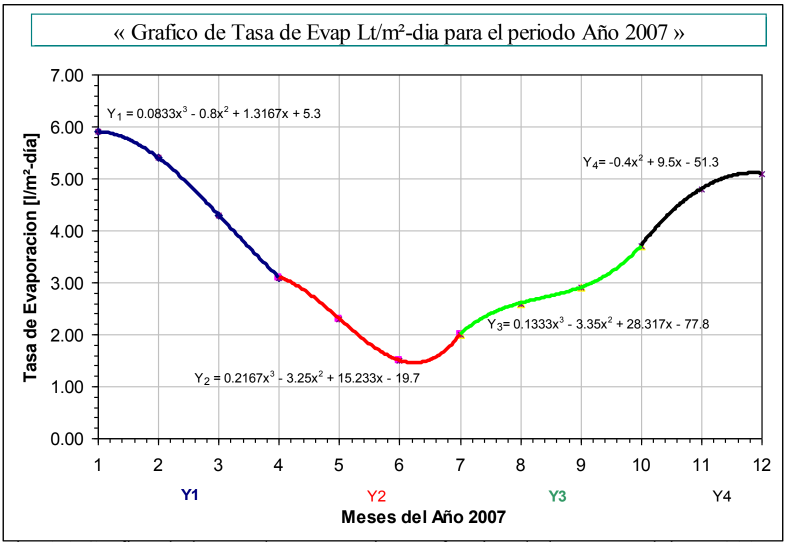

Fig. 1.1 Gráfico de la tasa de evaporación en función de los meses del año 2007

1.3.3. Conclusiones

Los polinomios de Lagrange, Hermite y otros, permite el ajuste de curvas en forma óptima, sin embargo lo fastidioso de estos métodos es que los polinomios resultantes son demasiados complicados para interpretar muchos datos. El método propuesto, fragmenta la curva en polinomios simples, lo cual permite generar con la misma precisión el ajuste de curvas que los métodos tradicionales. Manualmente el método puede resultar afanoso. No así mediante una planilla electrónica que, permitirá perfeccionarlo. Una descripción como la presentada facilitará analizar las variables atmosféricas con mayor prolijidad.

1.4. Referencias

Burden, R.L. & Faires, J.D (1998) Análisis Numérico. Sexta Edición, Internat. Thomson.
Gavurin, M.K. (1973). Conferencias sobre los métodos de cálculo. Editorial Mir.
Gaal, Lisl. (1971).Classical Galois Theory with examples. Markham PublishingCo, Chicago, Ill.
E. W. Swokowski-J.A.Cole (1997). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica, International Thomson Editores.